2017 北京海淀高三二模

数　　学（文）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

1. 若集合 $A=\{-2,0,1\}$，$B=\{x\mid x<-1\text{或}x>0\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{-2\}$　　B. $\{1\}$ C. $\{-2,1\}$　　D. $\{-2,0,1\}$

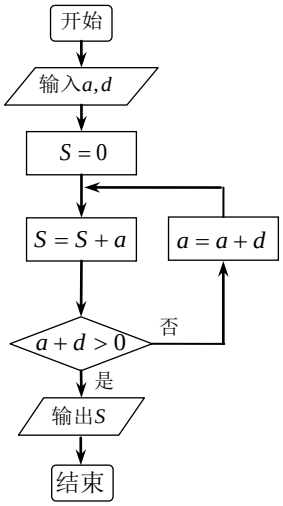
2. 在复平面内，复数 $z=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$ 对应的点的坐标为

A. $(1,-1)$ B. $(1,1)$ C. $(-1,1)$ D. $(-1,-1)$

3. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(x,1)$，$\boldsymbol{b}=(3,-2)$，若 $\boldsymbol{a}\ //\ \boldsymbol{b}$，则 $x=$

A. -3 B. $-\dfrac{3}{2}$ C. $\dfrac{2}{3}$　　D. $\dfrac{3}{2}$

4. 执行如图所示的程序框图，若输入 $a=-7,d=3$，则输出的 S 为



A. $S=-12$ B. $S=-11$

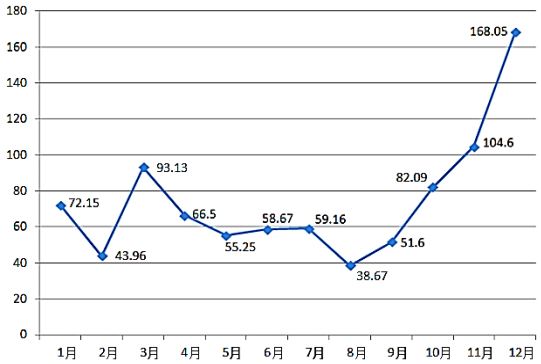
C. $S=-10$ D. $S=-6$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，则“$a_2>a_1$”是“数列 $\{a_n\}$ 为递增数列”的

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

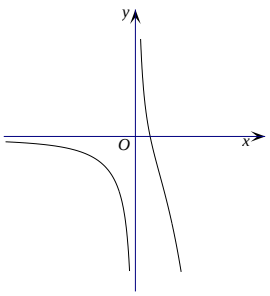
C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

6. 北京市 2016 年 12 个月的 PM2.5 平均浓度指数如右图所示. 由图判断，四个季度中 PM2.5 的平均浓度指数方差最小的是



A. 第一季度 B. 第二季度 C. 第三季度 D. 第四季度

7. 函数 $y=f(x)$ 的图象如图所示，则 $f(x)$ 的解析式可以为



A. $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^2$　　B. $f(x)=\dfrac{1}{x}-x^3$

C. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\mathrm{e}^x$　　D. $f(x)=\dfrac{1}{x}-\ln x$

8. 一位手机用户前四次输入四位数字手机密码均不正确，第五次输入密码正确，手机解锁. 事后发现前四次输入的密码中，每次都有两个数字正确，但它们各自的位置均不正确. 已知前四次输入密码分别为 3406，1630，7364，6173，则正确的密码中一定含有数字

A. 4，6　　B. 3，6　　C. 3，7　　D. 1，7

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9. 双曲线 $x^2-\frac{y^2}{9}=1$ 的实轴长为_____.

10. 在 $\log_2 3$, 2^{-3}，$\cos\pi$ 这三个数中最大的数是_____.

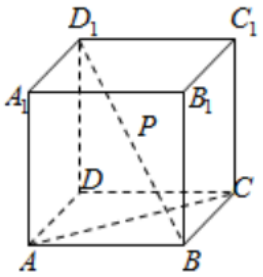
11. 在 ΔABC 中，$a=2$，$b=3$，$c=4$，则其最大内角的余弦值为_____.

12. 设 D 为不等式 $(x-1)^2+y^2\le 1$ 表示的平面区域，直线 $x+\sqrt{3}y+b=0$ 与区域 D 有公共点，则 b 的取值范围是_____.

13. 已知 O 为原点，点 P 为直线 $2x+y-2=0$ 上的任意一点. 非零向量 $\boldsymbol{a}=(m,n)$.

若 $\overrightarrow{OP}\cdot\boldsymbol{a}$ 恒为定值，则 $\frac{m}{n}=$_____.

14. 如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是线段 BD_1 上的动点. 当 ΔPAC 在平面 DC_1, BC_1, AC 上的正投影都为三角形时，将它们的面积分别记为 S_1,S_2,S_3.



（i）当 $BP=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 时，S_1____S_2（填“>”或“=”或“<”）；

（ii）$S_1+S_2+S_3$ 的最大值为____。

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

15.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{5}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{5}$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的最小正周期和对称轴的方程；

（Ⅱ）求函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值.

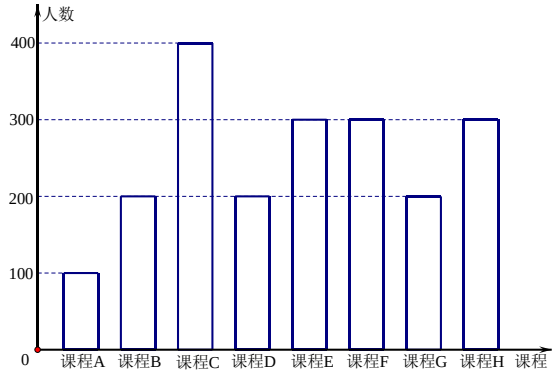
16.（本小题满分 13 分）

已知 $\{a_n\}$ 是各项为正数的等差数列，S_n 为其前 n 项和，且 $4S_n=(a_n+1)^2$.

（Ⅰ）求 a_1,a_2 的值及 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\{S_n-\frac{7}{2}a_n\}$ 的最小值.

17.（本小题满分 13 分）



为了响应教育部颁布的《关于推进中小学生研学旅行的意见》，某校计划开设八门研学旅行课程，并对全校学生的选课意向进行调查(调查要求全员参与，每个学生必须从八门课程中选出唯一一门课程)．本次调查结果如下．

图中，课程 A,B,C,D,E 为人文类课程，课程 F,G,H 为自然科学类课程．为进一步研究学生选课意向，结合上面图表，采取分层抽样方法从全校抽取 1%的学生作为研究样本组(以下简称“组 M”)．

(Ⅰ)在“组 M”中，选择人文类课程和自然科学类课程的人数各有多少？

(Ⅱ)某地举办自然科学营活动，学校要求：参加活动的学生只能是“组 M”中选择 F 课程或 G 课程的同学，并且这些同学以自愿报名缴费的方式参加活动．选择 F 课程的学生中有 x 人参加科学营活动，每人需缴纳 2000 元，选择 G 课程的学生中有 y 人参加该活动，每人需缴纳 1000 元．记选择 F 课程和 G 课程的学生自愿报名人数的情况为 (x,y)，参加活动的学生缴纳费用总和为 S 元．

(ⅰ)当 S=4000 时，写出 (x,y) 的所有可能取值；

(ⅱ)若选择 G 课程的同学都参加科学营活动，求 $S>4500$ 元的概率．

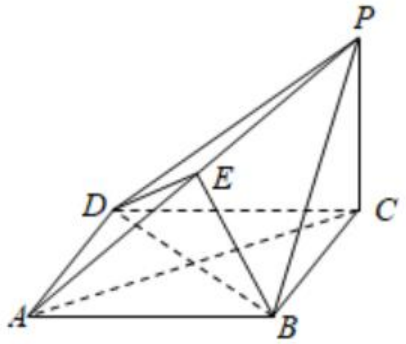
18.（本小题满分 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为菱形，$PC\perp$ 平面 $ABCD$，点 E 在棱 PA 上．

（Ⅰ）求证：直线 $BD\perp$ 平面 PAC；

（Ⅱ）若 PC // 平面 BDE，求证：$AE=EP$；

（Ⅲ）是否存在点 E，使得四面体 $A-BDE$ 的体积等于四面体 $P-BDC$ 的体积的 $\frac{1}{3}$？若存在，求出 $\frac{PE}{PA}$ 的值；若不存在，请说明理由．



19.（本小题满分 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+1$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）当 $0<a\le\frac{5}{2}$ 时，求函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值.

20.（本小题满分 14 分）

已知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$ 分别是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>0)$ 的左、右焦点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若 A,B 分别在直线 $x=-2$ 和 $x=2$ 上，且 $AF_1\perp BF_1$.

（ⅰ）当 ΔABF_1 为等腰三角形时，求 ΔABF_1 的面积；

（ⅱ）求点 F_1，F_2 到直线 AB 距离之和的最小值.

参考答案

一、选择题（本大题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	C	B	A	B	B	C	D

二、填空题（本大题共 6 小题, 每小题 5 分，有两空的小题，第一空 3 分，第二空 2 分，

共 30 分）

9． 2	10． $\log_2 3$	11. $-\frac{1}{4}$	12． $[-3,1]$ 或者 $-3\le b\le 1$
13．2		14．.=， $\frac{3}{2}$	

三、解答题(本大题共 6 小题, 共 80 分)

15. 解：

（Ⅰ） $f(x)=\sin 2x\cos\frac{\pi}{5}-\cos 2x\sin\frac{\pi}{5}=\sin(2x-\frac{\pi}{5})$，

所以 $f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$.

因为 $y=\sin x$ 的对称轴方程为 $x=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$，

令 $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$，

得 $x=\frac{7\pi}{20}+\frac{1}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$

$f(x)$ 的对称轴方程为 $x=\frac{7\pi}{20}+\frac{1}{2}k\pi,k\in\mathbf{Z}$.

或者： $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 和 $2x-\frac{\pi}{5}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbf{Z}$ }，即 $x=\frac{7\pi}{20}+k\pi$ 和 $x=-\frac{3\pi}{20}+k\pi,k\in\mathbf{Z}$

（Ⅱ）因为 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，

所以 $2x\in[0,\pi]$，

所以 $2x-\frac{\pi}{5}\in[-\frac{\pi}{5},\frac{4\pi}{5}]$，

所以，当 $2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{2}$，即 $x=\frac{7\pi}{20}$ 时，

$f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最大值为1.

16.（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）因为 $4S_n=(a_n+1)^2$，

所以，当 $n=1$ 时， $4a_1=(a_1+1)^2$，解得 $a_1=1$，

所以，当 $n=2$ 时， $4(1+a_2)=(a_2+1)^2$，解得 $a_2=-1$ 或 $a_2=3$，

因为$\{a_n\}$是各项为正数的等差数列，所以$a_2=3$，

所以$\{a_n\}$的公差$d=a_2-a_1=2$，

所以$\{a_n\}$的通项公式$a_n=a_1+(n-1)d=2n-1$.

（Ⅱ）因为$4S_n=(a_n+1)^2$，所以$S_n=\dfrac{(2n-1+1)^2}{4}=n^2$，

所以$S_n-\dfrac{7}{2}a_n=n^2-\dfrac{7}{2}(2n-1)$

$=n^2-7n+\dfrac{7}{2}$

$=(n-\dfrac{7}{2})^2-\dfrac{35}{4}$

所以，当$n=3$或$n=4$时，$S_n-\dfrac{7}{2}a_n$取得最小值$-\dfrac{17}{2}$.

17.（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）选择人文类课程的人数为(100+200+400+200+300)×1%=12(人)；

选择自然科学类课程的人数为(300+200+300)×1%=8(人).

（Ⅱ）

（ⅰ）当缴纳费用 S=4000 时，(x,y)只有两种取值情况：$(2,0),(1,2)$；

（ⅱ）设事件A:若选择G课程的同学都参加科学营活动，缴纳费用总和S超过 4500 元.

在“组M”中，选择 F 课程和 G 课程的人数分别为 3 人和 2 人.

由于选择G课程的两名同学都参加，下面考虑选择 F 课程的 3 位同学参加活动的情况.设每名同学报名参加活动用a表示，不参加活动用b表示，则 3 名同学报名参加活动的情况共有以下 8 种情况：*aaa*，*aab*，*aba*，*baa*，*bba*，*bab*，*abb*，*bbb*.

当缴纳费用总和 S 超过 4500 元时，选择 F 课程的同学至少要有 2 名同学参加，有如下 4 种：*aaa*，*aab*，*aba*，*baa*.

所以，$P(A)=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$.

18.（本小题满分 14 分）

解：

（Ⅰ）因为$PC\perp$平面$ABCD$，所以$PC\perp BD$，

因为底面$ABCD$是菱形，所以$BD\perp AC$，

因为 $PC \cap AC = C$，

所以 $BD \perp$ 平面 PAC.

（Ⅱ）设 AC 与 BD 交点为 O，连接 OE，

因为平面 $PAC \cap$ 平面 $BDE = OE$， PC // 平面 BDE，

所以 PC // OE，

又由 $ABCD$ 是菱形可知 O 为 AC 中点，

所以，在 ΔPAC 中，$\frac{AE}{EP} = \frac{AO}{OC} = 1$，

所以 $AE = EP$.

（Ⅲ）在 ΔPAC 中过点 E 作 EF // PC，交 AC 于点 F，

因为 $PC \perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $EF \perp$ 平面 $ABCD$.

由 $ABCD$ 是菱形可知 $S_{\Delta ABD} = S_{\Delta BDC}$，

假设存在点 E 满足 $V_{A-BDE} = \frac{1}{3}V_{P-BDC}$，即 $V_{E-BDA} = \frac{1}{3}V_{P-BDC}$，则

$EF = \frac{1}{3}PC$，

所以在 ΔPAC 中，$\frac{AE}{AP} = \frac{EF}{PC} = \frac{1}{3}$，

所以 $\frac{PE}{PA} = \frac{2}{3}$.

19.（本小题满分 13 分）

解：

（Ⅰ）由 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ 得 $f'(x) = x^2 + x - 2 = (x+1)(x-2)$，

令 $f'(x) = 0$，得 $x_1 = -2, x_2 = 1$，

$f(x), f'(x)$ 的情况如下表：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

所以函数 $f(x)$ 的单调区间为 $(-\infty,-2),(1,+\infty)$，单调减区间为 $(-2,1)$.

（Ⅱ）由 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$ 可得 $f(-2) = \frac{13}{3}$.

当 $-a < -2$ 即 $2 \le a \le \frac{5}{2}$ 时，由（Ⅰ）可得 $f(x)$ 在 $[-a,-2)$ 和 $(1,a]$ 上单调递增，在 $(-2,1)$ 上单调递减，

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值为 $\max\{f(-2), f(a)\}$，

又由（Ⅰ）可知 $f(a)\le f(\frac{5}{2})=\frac{13}{3}$，

所以 $\max\{f(-2),f(a)\}=f(-2)=\frac{13}{3}$；

当 $-a\ge -2,a\le 1$，即 $0<a\le 1$ 时，由（Ⅰ）可得 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上单调递减， $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的最大值为 $f(-a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}-2a+1$.

当 $-2\le -a,a>1$，即 $1<a\le 2$ 时，由（Ⅰ）可得 $f(x)$ 在 $[-a,1)$ 上单调递减，在 $(1,a]$ 上单调递增，

所以，函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值为 $\max\{f(-a),f(a)\}$，

法 1：因为 $f(-a)-f(a)==-\frac{2}{3}a(a^2-6)>0$，

所以 $\max\{f(-a),f(a)\}=f(-a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}-2a+1$.

法 2：因为 $-2\le -a<-1$，$1<a\le 2$

所以由（Ⅰ）可知 $f(-a)>f(-1)=\frac{19}{6}$， $f(a)\le f(2)=\frac{10}{6}$，

所以 $f(-a)>f(a)$，

所以 $\max\{f(-a),f(a)\}=f(-a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}-2a+1$.

法 3：设 $g(x)=f(-x)-f(x)=-\frac{2}{3}x^3+4x$，则 $g'(x)=-2x^2+4$，

$g(x),g'(x)$ 的在 $[1,2]$ 上的情况如下表：

x	1	$(1,\sqrt{2})$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt{2},2)$	2
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	$\frac{10}{3}$	↗	极大	↘	$\frac{8}{3}$

所以，当 $0<x<2$ 时， $g(x)>g(0)=0$，

所以 $g(a)=f(-a)-f(a)>0$，即 $f(-a)>f(a)$

所以 $\max\{f(-a),f(a)\}=f(-a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}-2a+1$.

综上讨论，可知：

当 $2\le a\le\frac{5}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值为 $\frac{13}{3}$；

当 $0<a<2$ 时，函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上的最大值为 $f(-a)=-\frac{a^3}{3}+\frac{a^2}{2}-2a+1$.

20.（本小题满分 14 分）

解：

（Ⅰ）由题意可得 $a^2-3=1$，

所以 $a^2=4$，

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）由题意可设$A(-2,m),B(2,n)$，

因为$AF_1\perp BF_1$，

所以$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{BF_1}=0$，即$mn=3$①

（ⅰ）因为$AF_1\perp BF_1$，

所以当ΔABF_1为等腰三角形时，只能是$|AF_1|=|BF_1|$，即$\sqrt{m^2+1}=\sqrt{9+n^2}$，

化简得$m^2-n^2=8$②

由①②可得$\begin{cases}m=3,\\n=1,\end{cases}$或$\begin{cases}m=-3,\\n=-1,\end{cases}$

所以$S_{\Delta ABF_1}=\frac{1}{2}|AF_1||BF_1|=\frac{1}{2}\sqrt{10}^2=5$.

（ⅱ）直线$AB:y=\frac{n-m}{4}(x+2)+m$，

化简得$(n-m)x-4y+2(m+n)=0$，

由点到直线的距离公式可得点F_1，F_2到直线AB距离之和为

$$d_1+d_2=\frac{|2(m+n)-(n-m)|}{\sqrt{(n-m)^2+16}}+\frac{|2(m+n)+(n-m)|}{\sqrt{(n-m)^2+16}}$$

因为点F_1，F_2在直线AB的同一侧，

所以$d_1+d_2=\frac{4|m+n|}{\sqrt{(n-m)^2+16}}=4\sqrt{\frac{m^2+n^2+2mn}{m^2+n^2-2mn+16}}$

因为$mn=3$，

所以$m^2+n^2\geq 2mn=6$，

$$d_1+d_2=4\sqrt{\frac{m^2+n^2+6}{m^2+n^2+10}}=4\sqrt{1-\frac{4}{m^2+n^2+10}}$$

所以$d_1+d_2=4\sqrt{1-\frac{4}{m^2+n^2+10}}\geq 2\sqrt{3}$

当$m=n=\sqrt{3}$或$m=n=-\sqrt{3}$时，点F_1，F_2到直线AB距离之和取得最小值$2\sqrt{3}$.