2017 北京朝阳高三二模

数　　学（理）

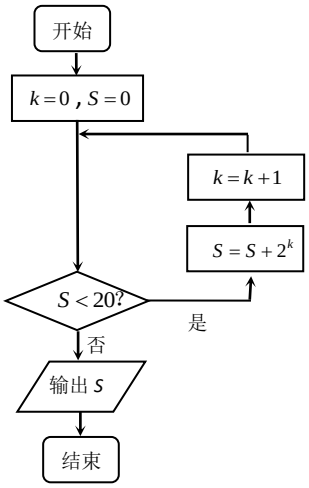
第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．已知 i 为虚数单位，则复数 $z=\mathrm{i}(1+2\mathrm{i})$ 对应的点位于

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

2．执行如图所示的程序框图，则输出的 S 值是



A．23　　B．31　　C．32　　D．63

3．“ $x>0, y>0$ ”是“ $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geqslant 2$ ”的

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

4．已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})(\omega>0)$ 的最小正周期为 4π，则

A．函数 $f(x)$ 的图象关于原点对称

B．函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称

C．函数 $f(x)$ 图象上的所有点向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，所得的图象关于原点对称

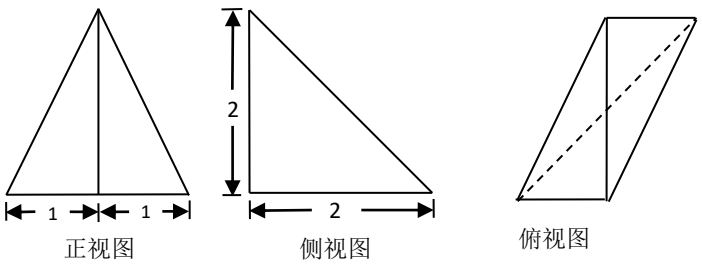
D．函数 $f(x)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上单调递增

5．现将 5 张连号的电影票分给甲、乙等 5 个人，每人一张，且甲、乙分得的电影票连号，则共有不同分法的种数为

A．12　　B．24　　C．36　　D．48

6．某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥最长的棱长为

A．$\sqrt{5}$　　B．$2\sqrt{2}$　　C．3　　D．$3\sqrt{2}$



正视图　　侧视图　　俯视图

7．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\log_a x, & x>0,\\ |x+3|, & -4\leq x<0\end{cases}$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$．若函数 $f(x)$ 的图象上有且只有两个点关于 y 轴对称，则 a 的取值范围是

A．$(0,1)$　　B．$(1,4)$　　C．$(0,1)\cup(1,+\infty)$　　D．$(0,1)\cup(1,4)$

8．中国古代儒家要求学生掌握六种基本才艺：礼、乐、射、御、书、数，简称“六艺”．某中学为弘扬“六艺”的传统文化，分别进行了主题为“礼、乐、射、御、书、数”六场传统文化知识的竞赛．现有甲、乙、丙三位选手进入了前三名的最后角逐．规定：每场知识竞赛前三名的得分都分别为$a,b,c(a>b>c,$且$a,b,c\in\mathbf{N}^*)$；选手最后得分为各场得分之和．在六场比赛后，已知甲最后得分为 26 分，乙和丙最后得分都为 11 分，且乙在其中一场比赛中获得第一名，则下列说法正确的是

A．每场比赛第一名得分a为 4　　B．甲可能有一场比赛获得第二名

C．乙有四场比赛获得第三名　　D．丙可能有一场比赛获得第一名

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．双曲线$\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{6}=1$的渐近线方程是____，离心率是____．

10．若平面向量$\boldsymbol{a}=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\boldsymbol{b}=(1,-1)$，且$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，则$\sin 2\theta$的值是____．

11．等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n．已知$a_1=2,a_4=-2$，则$\{a_n\}$的通项公式$a_n=$____，$S_9=$____．

12．在极坐标系中，圆$\rho=2\cos\theta$被直线$\rho\cos\theta=\frac{1}{2}$所截得的弦长为____．

13．已知x,y满足$\begin{cases}y\ge x,\\ x+y\le 4,\\ 2x-y\ge k.\end{cases}$若$z=x+2y$有最大值 8，则实数$k$的值为____．

14．已知两个集合A,B，满足$B\subseteq A$．若对任意的$x\in A$，存在$a_i,a_j\in B$ $(i\ne j)$，使得$x=\lambda_1 a_i+\lambda_2 a_j$（$\lambda_1,\lambda_2\in\{-1,0,1\}$），则称$B$为$A$的一个基集．若$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$，则其基集$B$元素个数的最小值是____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（本小题满分 13 分）

在△ABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$b=c$，$2\sin B=\sqrt{3}\sin A$．

（Ⅰ）求$\cos B$的值；

（Ⅱ）若$a=2$，求△ABC的面积．

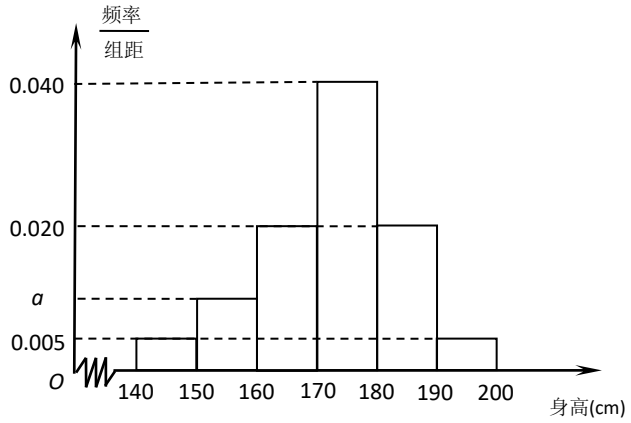
16.（本小题满分 13 分）

从某市的中学生中随机调查了部分男生，获得了他们的身高数据，整理得到如下频率分布直方图.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）假设同组中的每个数据用该组区间的中点值代替，估计该市中学生中的全体男生的平均身高；

（Ⅲ）从该市的中学生中随机抽取一名男生，根据直方图中的信息，估计其身高在 180 cm 以上的概率．若从全市中学的男生（人数众多）中随机抽取 3 人，用 X 表示身高在 180 cm 以上的男生人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望 EX ．



17.（本小题满分 14 分）

如图 1，在 Rt $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4, BC=2$，D, E 分别为边 AC, AB 的中点，点 F, G 分别为线段 CD, BE 的中点．将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折起到 $\triangle A_1DE$ 的位置，使 $\angle A_1DC=60°$．点 Q 为线段 A_1B 上的一点，如图 2.

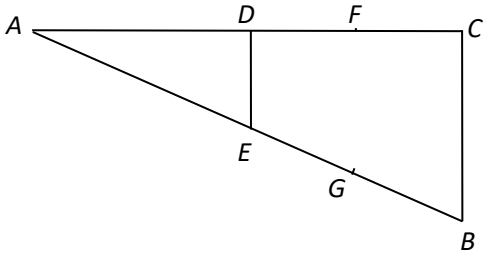


图 1

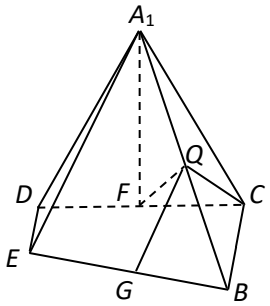


图 2

（Ⅰ）求证：$A_1F \perp BE$；

（Ⅱ）线段 A_1B 上是否存在点 Q，使得 $FQ \parallel$ 平面 A_1DE？若存在，求出 A_1Q 的长，若不存在，请说明理由；

（Ⅲ）当 $\overrightarrow{A_1Q}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1B}$ 时，求直线 GQ 与平面 A_1DE 所成角的大小.

18.（本小题满分 13 分）

已知椭圆W：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$的上下顶点分别为$A,B$，且点$B\ (0,-1)$．$F_1,F_2$分别为椭圆$W$的左、右焦点，且$\angle F_1BF_2=120^\circ$．

（Ⅰ）求椭圆W的标准方程；

（Ⅱ）点M是椭圆上异于A，B的任意一点，过点M作$MN\perp y$轴于N，E为线段MN的中点．直线AE与直线$y=-1$交于点C，G为线段BC的中点，O为坐标原点．求$\angle OEG$的大小．

19.（本小题满分 14 分）

已知函数$f(x)=\mathrm{e}^x+x^2-x$，$g(x)=x^2+ax+b,\ a,b\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）当$a=1$时，求函数$F(x)=f(x)-g(x)$的单调区间；

（Ⅱ）若曲线$y=f(x)$在点$(0,1)$处的切线l与曲线$y=g(x)$切于点$(1,c)$，求

a,b,c的值；

（Ⅲ）若$f(x)\geq g(x)$恒成立，求$a+b$的最大值．

20.（本小题满分 13 分）

各项均为非负整数的数列$\{a_n\}$同时满足下列条件：

①$a_1=m\ \ (m\in\mathbf{N}^*)$；②$a_n\leq n-1\ \ (n\geq 2)$；③$n$是$a_1+a_2+\cdots+a_n$的因数（$n\geq 1$）．

（Ⅰ）当$m=5$时，写出数列$\{a_n\}$的前五项；

（Ⅱ）若数列$\{a_n\}$的前三项互不相等，且$n\geq 3$时，a_n为常数，求m的值；

（Ⅲ）求证：对任意正整数m，存在正整数M，使得$n\geq M$时，a_n为常数．

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	B	A	C	D	C	D	C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

题号	(9)		(10)	(11)		(12)	(13)	(14)
答案	$y=\pm\sqrt{2}x$	$\sqrt{3}$	1	$2\times(-1)^{n-1}$	2	$\sqrt{3}$	-4	4

三、解答题：

(15)（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $2\sin B=\sqrt{3}\sin A$，所以 $2b=\sqrt{3}a$.

所以 $a=\dfrac{2b}{\sqrt{3}}$.

所以 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{(\frac{2b}{\sqrt{3}})^2+b^2-b^2}{2\times\frac{2b}{\sqrt{3}}\cdot b}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. .....7 分

（Ⅱ）因为 $a=2$，所以 $b=c=\sqrt{3}$.

又因为 $\cos B=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

所以 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}a\cdot c\cdot\sin B=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=\sqrt{2}$. .....13 分

(16)（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）根据题意得：$(0.005\times2+a+0.020\times2+0.040)\times10=1$.

解得 $a=0.010$. .....3 分

（Ⅱ）设样本中男生身高的平均值为 $\bar{x}$，则

$\bar{x}=145\times0.05+155\times0.1+165\times0.2+175\times0.4+185\times0.2+195\times0.05$

$=(145+195)\times0.05+155\times0.1+(165+185)\times0.2+175\times0.4$

$=17+15.5+70+70=172.5$.

所以估计该市中学全体男生的平均身高为 172.5 cm. .....7 分

（Ⅲ）从全市中学的男生中任意抽取一人，其身高在180 cm 以上的概率约为$\frac{1}{4}$.

由已知得，随机变量X的可能取值为$0,1,2,3$.

所以$P(X=0)=C_3^0(\frac{1}{4})^0\cdot(\frac{3}{4})^3=\frac{27}{64}$；

$P(X=1)=C_3^1(\frac{1}{4})^1\cdot(\frac{3}{4})^2=\frac{27}{64}$；

$P(X=2)=C_3^2(\frac{1}{4})^2\cdot(\frac{3}{4})^1=\frac{9}{64}$；

$P(X=3)=C_3^3(\frac{1}{4})^3\cdot(\frac{3}{4})^0=\frac{1}{64}$.

随机变量X的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

因为$X\sim B(3,\frac{1}{4})$，所以$EX=3\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$. .....13 分

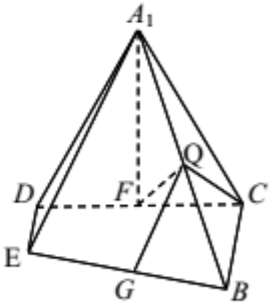
（17）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）因为$A_1D=DC,\angle A_1DC=60°$，

所以△A_1DC为等边三角形.

又因为点F为线段CD的中点，

所以$A_1F\perp DC$.



由题可知$ED\perp A_1D, ED\perp DC$，

所以$ED\perp$平面A_1DC.

因为$A_1F\subset$平面A_1DC，所以$ED\perp A_1F$.

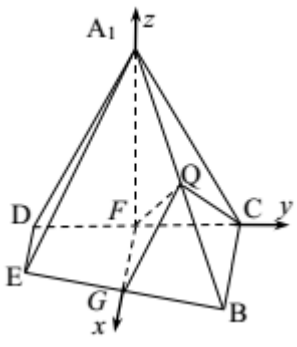
又$ED\cap DC=D$，所以$A_1F\perp$平面$BCDE$.

所以$A_1F\perp BE$. .....5 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$A_1F\perp$平面$BCDE$，$FG\perp DC$，如图

建立空间直角坐标系，则$F(0,0,0)$，$D(0,-1,0)$，

$C(0,1,0)$，$E(1,-1,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{3})$，$B(2,1,0)$.



设平面A_1DE的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

$\overrightarrow{A_1D}=(0,-1,-\sqrt{3})$，$\overrightarrow{DE}=(1,0,0)$，

所以 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y+\sqrt{3}z=0,\\ x=0.\end{cases}$

令 $z=1$，所以 $y=-\sqrt{3}$，所以 $\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{3},1)$.

假设在线段 A_1B 上存在点 Q，使 FQ // 平面 A_1DE.

设 $\overrightarrow{A_1Q}=\lambda\overrightarrow{A_1B}$，$\lambda\in(0,1]$.

又 $\overrightarrow{A_1B}=(2,1,-\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{A_1Q}=(2\lambda,\lambda,-\sqrt{3}\lambda)$.

所以 $Q(2\lambda,\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.则 $\overrightarrow{FQ}=(2\lambda,\lambda,\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

所以 $\overrightarrow{FQ}\cdot\boldsymbol{n}=-\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda=0$.

解得，$\lambda=\frac{1}{2}$.

则在线段 A_1B 上存在中点 Q，使 FQ // 平面 A_1DE.

且 $A_1Q=\sqrt{2}$. .....10 分

（Ⅲ）因为 $\overrightarrow{A_1Q}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A_1B}$，又 $\overrightarrow{A_1B}=(2,1,-\sqrt{3})$，所以 $\overrightarrow{A_1Q}=(\frac{3}{2},\frac{3}{4},-\frac{3\sqrt{3}}{4})$.

所以 $Q(\frac{3}{2},\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$. 又因为 $G(\frac{3}{2},0,0)$，

所以 $\overrightarrow{GQ}=(0,\frac{3}{4},\frac{\sqrt{3}}{4})$.

因为 $\boldsymbol{n}=(0,-\sqrt{3},1)$, 设直线 GQ 与平面 A_1DE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\frac{\overrightarrow{GQ}\cdot\boldsymbol{n}}{|\overrightarrow{GQ}||\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{0-\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}}{2\times\frac{2\sqrt{3}}{4}}\right|=\frac{1}{2}$.

直线 GQ 与平面 A_1DE 所成角为 $30°$. .....14 分

（18）（本小题满分 13 分）

解：(Ⅰ)依题意，得 $b=1$. 又 $\angle F_1BF_2=120°$，

在 $\mathrm{Rt}\Delta BF_1O$ 中，$\angle F_1BO=60°$，所以 $a=2$.

所以椭圆 W 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. .....4 分

(Ⅱ)设 $M\ (x_0,y_0)$，$x_0\neq 0$，则 $N\ (0,y_0)$，$E\ (\frac{x_0}{2},y_0)$.

因为点 M 在椭圆 W 上，所以 $\frac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$．即 ${x_0}^2=4-4{y_0}^2$.

又 $A\ (0,1)$，所以直线 AE 的方程为 $y-1=\frac{2(y_0-1)}{x_0}x$.

令 $y=-1$，得 $C\ (\frac{x_0}{1-y_0},-1)$.

又 $B\ (0,-1)$，G 为线段 BC 的中点，所以 $G\ (\frac{x_0}{2(1-y_0)},-1)$.

所以 $\overrightarrow{OE}=(\frac{x_0}{2},y_0)$，$\overrightarrow{GE}=(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)},y_0+1)$.

因为 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{GE}=\frac{x_0}{2}(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)})+y_0(y_0+1)$

$=\frac{{x_0}^2}{4}-\frac{{x_0}^2}{4(1-y_0)}+{y_0}^2+y_0$

$=1-\frac{4-4{y_0}^2}{4(1-y_0)}+y_0$

$=1-y_0-1+y_0=0$，

所以 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{GE}$．$\angle OEG=90°$.　　.....13 分

（19）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）$F(x)=\mathrm{e}^x-2x-b$，则 $F'(x)=\mathrm{e}^x-2$.

令 $F'(x)=\mathrm{e}^x-2>0$, 得 $x>\ln 2$，所以 $F(x)$ 在 $(\ln 2,+\infty)$ 上单调递增.

令 $F'(x)=\mathrm{e}^x-2<0$, 得 $x<\ln 2$，所以 $F(x)$ 在 $(-\infty,\ln 2)$ 上单调递减.　.....4 分

（Ⅱ）因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x+2x-1$，所以 $f'(0)=0$，所以 l 的方程为 $y=1$.

依题意，$-\frac{a}{2}=1$，$c=1$.

于是 l 与抛物线 $g(x)=x^2-2x+b$ 切于点 $(1,1)$，

由 $1^2-2+b=1$ 得 $b=2$.

所以 $a=-2,b=2,c=1$.　　.....8 分

（Ⅲ）设 $h(x)=f(x)-g(x)=\mathrm{e}^x-(a+1)x-b$, 则 $h(x)\geq 0$ 恒成立.

易得 $h'(x)=e^x-(a+1)$.

（1）当 $a+1\le 0$ 时，

因为 $h'(x)>0$，所以此时 $h(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增.

①若 $a+1=0$，则当 $b\le 0$ 时满足条件，此时 $a+b\le -1$；

②若 $a+1<0$，取 $x_0<0$ 且 $x_0<\dfrac{1-b}{a+1}$，

此时 $h(x_0)=e^{x_0}-(a+1)x_0-b<1-(a+1)\dfrac{1-b}{a+1}-b=0$，所以 $h(x)\ge 0$ 不恒成立.

不满足条件；

（2）当 $a+1>0$ 时，

令 $h'(x)=0$，得 $x=\ln(a+1)$. 由 $h'(x)>0$，得 $x>\ln(a+1)$；

由 $h'(x)<0$，得 $x<\ln(a+1)$.

所以 $h(x)$ 在 $(-\infty,\ln(a+1))$ 上单调递减，在 $(\ln(a+1),+\infty)$ 上单调递增.

要使得“ $h(x)=e^x-(a+1)x-b\ge 0$ 恒成立”，必须有

“当 $x=\ln(a+1)$ 时，$h(x)_{\min}=(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-b\ge 0$ ”成立.

所以 $b\le(a+1)-(a+1)\ln(a+1)$. 则 $a+b\le 2(a+1)-(a+1)\ln(a+1)-1$.

令 $G(x)=2x-x\ln x-1,x>0$, 则 $G'(x)=1-\ln x$.

令 $G'(x)=0$，得 $x=e$. 由 $G'(x)>0$，得 $0<x<e$；

由 $G'(x)<0$，得 $x>e$. 所以 $G(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，在 $(e,+\infty)$ 上单调递减,

所以，当 $x=e$ 时，$G(x)_{\max}=e-1$.

从而，当 $a=e-1,b=0$ 时，$a+b$ 的最大值为 $e-1$.

综上，$a+b$ 的最大值为 $e-1$. .....14 分

（20）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）5，1，0，2，2. .....3 分

（Ⅱ）因为 $0\le a_n\le n-1$，所以 $0\le a_2\le 1,0\le a_3\le 2$，

又数列 $\{a_n\}$ 的前 3 项互不相等，

（1）当 $a_2=0$ 时，

若 $a_3=1$，则 $a_3=a_4=a_5=\cdots=1$，

且对 $n\ge 3$，$\dfrac{m+0+(n-2)}{n}=\dfrac{m-2}{n}+1$ 都为整数，所以 $m=2$；

若 $a_3=2$，则 $a_3=a_4=a_5=\cdots=2$，

且对 $n\geq 3$，$\dfrac{m+0+2(n-2)}{n}=\dfrac{m-4}{n}+2$ 都为整数，所以 $m=4$；

（2）当 $a_2=1$ 时，

若 $a_3=0$，则 $a_3=a_4=a_5=\cdots=0$，且对 $n\geq 3$，$\dfrac{m+1+0\cdot(n-2)}{n}=\dfrac{m+1}{n}$ 都为整数，

所以 $m=-1$，不符合题意；

若 $a_3=2$，则 $a_3=a_4=a_5=\cdots=2$，

且对 $n\geq 3$，$\dfrac{m+1+2(n-2)}{n}=\dfrac{m-3}{n}+2$ 都为整数，所以 $m=3$；

综上，m 的值为 $2,3,4$．　　.....8 分

（III）对于 $n\geq 1$，令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，

则 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}<\dfrac{S_{n+1}}{n}=\dfrac{S_n+a_{n+1}}{n}\leq\dfrac{S_n+n}{n}=\dfrac{S_n}{n}+1$．

又对每一个 n，$\dfrac{S_n}{n}$ 都为正整数，所以 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}\leq\dfrac{S_n}{n}\leq\ldots\leq\dfrac{S_1}{1}=m$，其中“$<$”至多

出现 $m-1$ 个. 故存在正整数 $M>m$，当 $n>M$ 时，必有 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n}{n}$ 成立.

当 $\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_n}{n}$ 时，则 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{(n+1)S_n}{n}-S_n=\dfrac{S_n}{n}$.

从而 $\dfrac{S_{n+2}}{n+2}=\dfrac{a_{n+2}+a_{n+1}+S_n}{n+2}=\dfrac{a_{n+2}+(n+1)a_{n+1}}{n+2}=a_{n+1}+\dfrac{a_{n+2}-a_{n+1}}{n+2}$.

由题设知 $\dfrac{|a_{n+2}-a_{n+1}|}{n+2}\leq\dfrac{n+1}{n+2}<1$，又 $\dfrac{S_{n+2}}{n+2}$ 及 a_{n+1} 均为整数，

所以 $\dfrac{S_{n+2}}{n+2}=a_{n+1}=\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{S_{n+1}}{n+1}$，故 $\dfrac{S_n}{n}=\dfrac{S_{n+1}}{n+1}=\dfrac{S_{n+2}}{n+2}=\cdots=$常数.

从而 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=\dfrac{(n+1)S_n}{n}-S_n=\dfrac{S_n}{n}=$常数.

故存在正整数 M，使得 $n\geq M$ 时，a_n 为常数. .....13 分