# 2017 北京朝阳高三二模

# 数　　学（文）

## 第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

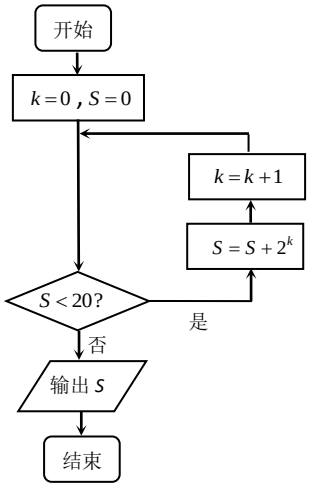
（1）已知 i 为虚数单位，则复数 $z=(1+\mathrm{i})\mathrm{i}$ 对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（2）已知 $x>y$，则下列不等式一定成立的是

（A）$\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}$　　（B）$\log_2(x-y)>0$　　（C）$x^3<y^3$　　（D）$(\dfrac{1}{2})^x<(\dfrac{1}{2})^y$

（3）执行如图所示的程序框图，则输出的 $S$ 值是




（A）15　　（B）29　　（C） 31　　（D） 63

（4）“ $x>0, y>0$ ”是“ $\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geq 2$ ”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

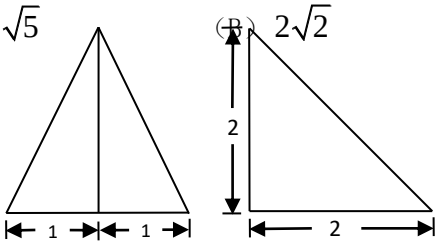
（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（5）将函数 $f(x)=\cos 2x$ 图象上所有点向右平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象，若 $g(x)$ 在区间 $[0,a]$ 上单调递增，则实数 $a$ 的最大值为

（A）$\dfrac{\pi}{8}$　　（B）$\dfrac{\pi}{4}$　　（C）$\dfrac{\pi}{2}$　　（D）$\dfrac{3}{4}\pi$

（6）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥最长的棱长为

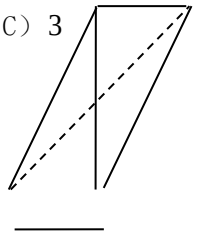
（A）$\sqrt{5}$　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）3　　（D）$3\sqrt{2}$



正视图



侧视图


俯视图

（7）已知过定点 $P(2,0)$ 的直线 $l$ 与曲线 $y=\sqrt{2-x^2}$ 相交于 $A$，$B$ 两点，$O$ 为坐标原点，当 $\Delta AOB$ 的面积最大时，直线 $l$ 的倾斜角为

（A）$150^\circ$　　（B）$135^\circ$　　（C）$120^\circ$　　（D）$30^\circ$

（8）“现代五项”是由现代奥林匹克之父顾拜旦先生创立的运动项目，包含射击、击剑、游泳、马术和越野跑五项运动. 已知甲、乙、丙共三人参加“现代五项”. 规定每一项运动的前三名得分都分别为 $a$，$b$，$c$（ $a>b>c$ 且 $a,b,c\in\mathbf{N}^*$ ），选手最终得分为各项得分之和. 已知甲最终得 22 分，乙和丙最终各得 9 分，且乙的马术比赛获得了第一名，则游泳比赛的第三名是

(A)甲　　（B）乙　　（C）丙　　（D）乙和丙都有可能

**第二部分（非选择题 共 110 分）**

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

（9）已知集合 $A=\left\{x\middle|2^{x-1}>1\right\}$，$B=\left\{x\middle|x(x-2)<0\right\}$，则 $A\cap B=$_____.

（10）在平面直角坐标系中，已知点 $A(-1,0)$，$B(1,2)$，$C(3,-1)$，点 $P(x,y)$ 为 $\Delta ABC$ 边界及内部的任意一点，则 $x+y$ 的最大值为_____.

（11）已知平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-4$，且 $|\boldsymbol{a}|=2$，$|\boldsymbol{b}|=4$，则 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于_____.

（12）设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0,\\ x^3+a, & x\le 0,\end{cases}$ 则 $f(1)=$___；若 $f(x)$ 在其定义域内为单调递增函数，则实数 $a$ 的取值范围是____.

（13）已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 与抛物线 $y^2=8x$ 有一个公共的焦点 $F$. 设这两曲线的一个交点为 $P$，若 $|PF|=5$，则点 $P$ 的横坐标是_____；该双曲线的渐近线方程为_____.

（14）设 $P$ 为曲线 $C_1$ 上动点，$Q$ 为曲线 $C_2$ 上动点，则称 $|PQ|$ 的最小值为曲线 $C_1$，$C_2$ 之间的距离，记作 $d(C_1,C_2)$. 若 $C_1:x^2+y^2=2$，$C_2:(x-3)^2+(y-3)^2=2$，则 $d(C_1,C_2)=$ _____；若 $C_3:\mathrm{e}^x-2y=0$，$C_4:\ln x+\ln 2=y$，则 $d(C_3,C_4)=$_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（15）（本小题满分 13 分）

在△ $ABC$ 中，角 $A$，$B$，$C$ 的对边分别为 $a$，$b$，$c$，且 $a>b>c$，$\sqrt{3}c-2b\sin C=0$.

（Ⅰ）求角 $B$ 的大小；

（Ⅱ）若 $b=\sqrt{3}$，$c=1$，求 $a$ 和△ $ABC$ 的面积.

（16）（本小题满分 13 分）

已知数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1=\dfrac{1}{3}$，公比 $q=\dfrac{1}{3}$ 的等比数列. 设 $b_n=2\log_{\frac{1}{3}}a_n-1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

（Ⅰ）求证：数列 $\{b_n\}$ 为等差数列；

（Ⅱ）设 $c_n=a_n+b_{2n}$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 $n$ 项和 $T_n$.

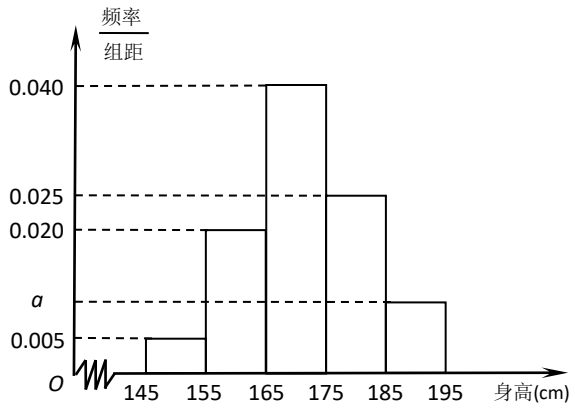
（17）（本小题满分 13 分）

某中学随机选取了 40 名男生，将他们的身高作为样本进行统计，得到如图所示的频率分布直方图．观察图中数据，完成下列问题．

（Ⅰ）求 $a$ 的值及样本中男生身高在 $[185,195]$（单位：cm）的人数；

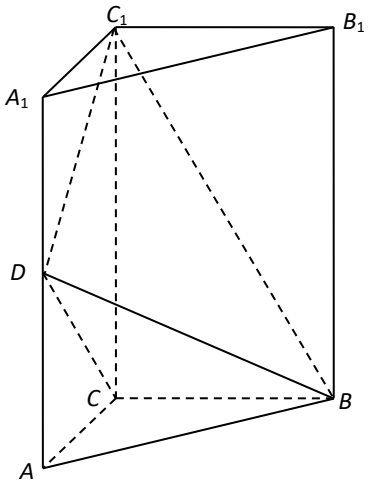
（Ⅱ）假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替，通过样本估计该校全体男生的平均身高；

（Ⅲ）在样本中，从身高在 $[145,155)$ 和 $[185,195]$（单位：cm）内的男生中任选两人，求这两人的身高都不低于 185 cm 的概率．




（18）（本小题满分 14 分）

如图，在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AA_1$ ⊥ 底面 $ABC$，$\angle ACB=90°$，$AC=BC=1$，$AA_1=2$，$D$ 是棱 $AA_1$ 的中点．




（Ⅰ）求证：$B_1C_1$ // 平面 $BCD$；

（Ⅱ）求三棱锥 $B-C_1CD$ 的体积；

（Ⅲ）在线段 $BD$ 上是否存在点 $Q$，使得 $CQ\perp BC_1$？

请说明理由．

（19）（本小题满分 14 分）

已知椭圆$W$：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (b>0)$的一个焦点坐标为$(\sqrt{3},0)$.

（Ⅰ）求椭圆$W$的方程和离心率；

（Ⅱ）若椭圆$W$与$y$轴交于$A$，$B$两点（$A$点在$B$点的上方），$M$是椭圆上异于$A$，$B$的任意一点，过点$M$作$MN\perp y$轴于$N$，$E$为线段$MN$的中点，直线$AE$与直线$y=-1$交于点$C$，$G$为线段$BC$的中点，$O$为坐标原点．求$\angle OEG$的大小.

（20）（本小题满分 13 分）

已知函数$f(x)=x\ln x$，$g(x)=\frac{a}{2}x^2+x-a\ (a\in\mathbf{R})$.

（Ⅰ）若直线$x=m\ (m>0)$与曲线$y=f(x)$和$y=g(x)$分别交于$M,N$两点. 设曲线

$y=f(x)$在点$M$处的切线为$l_1$，$y=g(x)$在点$N$处的切线为$l_2$.

（ⅰ）当$m=\mathrm{e}$时，若$l_1\perp l_2$，求$a$的值；

（ⅱ）若$l_1/\!/l_2$，求$a$的最大值；

（Ⅱ）设函数$h(x)=f(x)-g(x)$在其定义域内恰有两个不同的极值点$x_1$，$x_2$，且$x_1<x_2$.

若$\lambda>0$，且$\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$恒成立，求$\lambda$的取值范围.

# 参考答案

一、 选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

| 题号 | （1） | （2） | （3） | （4） | （5） | （6） | （7） | （8） |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | B | D | C | A | B | C | A | B |

二、 填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

| 题号 | （9） | （10） | （11） | （12） | （13） | （14） |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 答案 | $\{x\|1<x<2\}$ | 3 | $\frac{\pi}{3}$ | 2；<br>$(-\infty,1]$ | $3;\ y=\pm\sqrt{3}x$ | $\sqrt{2}$；<br>$\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln 2$ |

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

（15）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）因为$\sqrt{3}c-2b\sin C=0$，

所以$\sqrt{3}\sin C-2\sin B\sin C=0$.

因为$0<C<\pi$，所以$\sin C\neq 0$，

所以$\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为$0<B<\pi$，且$a>b>c$，所以$B=\frac{\pi}{3}$. ……6 分

（Ⅱ）因为$b=\sqrt{3}$，$c=1$，

所以由余弦定理$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

得$(\sqrt{3})^2=a^2+1-2a\times 1\times\frac{1}{2}$，即$a^2-a-2=0$.

解得$a=2$或$a=-1$（舍）.

所以$a=2$.

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 2\times 1\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……13 分

（16）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ）由已知得：$a_n=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}=(\frac{1}{3})^n$.

$b_n=2\log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^n-1=2n-1$（$n\in\mathbf{N}^*$）.

则$b_{n+1}-b_n=2(n+1)-1-2n+1=2$.

所以数列$\{b_n\}$是以1为首项，2 为公差的等差数列. ……6 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，

$b_{2n}=4n-1$，则数列$\{b_{2n}\}$是以3为首项，4为公差的等差数列.

$c_n=a_n+b_{2n}=(\frac{1}{3})^n+4n-1.$

则$T_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+...+(\frac{1}{3})^n+3+7+...+(4n-1).$

即$T_n=\frac{\frac{1}{3}\times[1-(\frac{1}{3})^n]}{1-\frac{1}{3}}+\frac{(3+4n-1)\cdot n}{2}.$

即$T_n=2n^2+n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3})^n$（$n\in\mathbf{N}^*$）. ……13分

（17）（本小题满分13分）

解：（Ⅰ）根据题意，

$(0.005+a+0.020+0.025+0.040)\times10=1.$

解得 $a=0.010$.

所以样本中学生身高在$[185,195]$内（单位：cm）的人数为

$40\times0.01\times10=4$. ……4分

（Ⅱ）设样本中男生身高的平均值为$\bar{x}$，则

$\bar{x}=150\times0.05+160\times0.2+170\times0.4+180\times0.25+190\times0.1$

$=7.5+32+68+45+19=171.5$ .

所以，该校男生的平均身高为171.5 cm. ……8分

（Ⅲ）样本中男生身高在$[145,155)$内的人有

$40\times0.005\times10=2$（个），记这两人为$A,B$.

由（Ⅰ）可知，学生身高在$[185,195]$内的人有4个，记这四人为$a,b,c,d$ .

所以，身高在$[145,155)$和$[185,195]$内的男生共6人.

从这6人中任意选取2人，有$ab,ac,ad,aA,aB,bc,bd,bA,bB,cd,cA,cB,dA,dB,AB$，

共15种情况.

设所选两人的身高都不低于185 cm为事件$M$，

事件$M$包括$ab,ac,ad,bc,bd,cd$，共6种情况.

所以，所选两人的身高都不低于185 cm的概率为

$P(M)=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$. ……13分

（18）（本小题满分14分）

解：（Ⅰ）在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $B_1C_1 \parallel BC$，

且 $BC \subset$ 平面 $BCD$， $B_1C_1 \not\subset$ 平面 $BCD$，

所以 $B_1C_1 \parallel$ 平面 $BCD$. ……4 分

（Ⅱ）因为 $AA_1 \perp$ 底面 $ABC$， $\angle ACB=90°$，

所以 $AA_1 \perp BC$， $AC \perp BC$， 则 $BC \perp$ 平面 $AA_1C_1C$.

即 $BC \perp$ 平面 $C_1CD$.

所以 $V_{B-CC_1D}=\frac{1}{3}S_{\triangle C_1CD}\cdot BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}CC_1\cdot AC\cdot BC=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times1\times1=\frac{1}{3}$. ……9 分

（Ⅲ）因为在侧面 $ACC_1A_1$ 中， $AC=\frac{1}{2}AA_1$， $AA_1 \perp AC$， $D$ 是棱 $AA_1$ 的中点，

所以 $\angle A_1DC_1=45°, \angle ADC=45°$. 则 $C_1D \perp DC$.

因为 $BC \perp$ 平面 $C_1CD$， 所以 $BC \perp C_1D$.

所以 $C_1D \perp$ 平面 $BCD$.

又 $C_1D \subset$ 平面 $C_1DB$，

所以平面 $BCD \perp$ 平面 $C_1DB$，且平面 $BCD \cap$ 平面 $C_1DB=BD$，

过点 $C$ 作 $CQ \perp BD$ 于 $Q$，所以 $CQ \perp$ 平面 $C_1DB$.

则 $CQ \perp BC_1$.

所以在线段 $BD$ 上存在点 $Q$，使得 $CQ \perp BC_1$. ……14 分

（19）（本小题满分 14 分）

解：（Ⅰ）依题意， $a=2$， $c=\sqrt{3}$，所以 $b^2=a^2-c^2=1$.

则椭圆 $W$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. ……4 分

（Ⅱ）设 $M\ (x_0,y_0)$， $x_0\neq0$，则 $N\ (0,y_0)$， $E\ (\frac{x_0}{2},y_0)$.

又 $A\ (0,1)$，所以直线 $AE$ 的方程为 $y-1=\frac{2(y_0-1)}{x_0}x$.

令 $y=-1$，则 $C\ (\frac{x_0}{1-y_0},-1)$.

又 $B\ (0,-1)$，$G$ 为线段 $BC$ 的中点，所以 $G\ (\frac{x_0}{2(1-y_0)},-1)$.

所以 $\overrightarrow{OE}=(\frac{x_0}{2},y_0)$，$\overrightarrow{GE}=(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)},y_0+1)$，

$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{GE}=\frac{x_0}{2}(\frac{x_0}{2}-\frac{x_0}{2(1-y_0)})+y_0(y_0+1)$

$=\frac{{x_0}^2}{4}-\frac{{x_0}^2}{4(1-y_0)}+{y_0}^2+y_0$.

因为点 $M$ 在椭圆 $W$ 上，则 $\frac{{x_0}^2}{4}+{y_0}^2=1$，所以 ${x_0}^2=4-4{y_0}^2$.

则 $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{GE}=1-\frac{{x_0}^2}{4(1-y_0)}+y_0=1-y_0-1+y_0=0$.

因此 $\overrightarrow{OE}\perp\overrightarrow{GE}$．故 $\angle OEG=90^\circ$.　……14 分

（20）（本小题满分 13 分）

解：（Ⅰ） 函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$.

$f'(x)=1+\ln x$，$g'(x)=ax+1$.

（ⅰ）当 $m=\mathrm{e}$ 时，$f'(\mathrm{e})=2$，$g'(\mathrm{e})=a\mathrm{e}+1$.

因为 $l_1\perp l_2$，所以 $f'(\mathrm{e})\cdot g'(\mathrm{e})=-1$.

即 $2(a\mathrm{e}+1)=-1$.

解得 $a=-\frac{3}{2\mathrm{e}}$.　……3 分

（ⅱ）因为 $l_1\ /\!/\ l_2$，则 $f'(m)=g'(m)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

即 $\ln m-am=0$ 在 $(0,+\infty)$ 上有解.

设 $F(x)=\ln x-ax$，$x>0$，

则 $F'(x)=\frac{1}{x}-a=\frac{1-ax}{x}$.

（1）当 $a\le 0$ 时，$F'(x)>0$ 恒成立，则函数 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上为增函数.

1° 当 $a<0$ 时，取 $x=\mathrm{e}^a$，$F(\mathrm{e}^a)=a-a\mathrm{e}^a=a(1-\mathrm{e}^a)<0$.

取 $x=\mathrm{e}$，$F(\mathrm{e})=1-a\mathrm{e}>0$,

所以 $F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上存在零点.

2° 当 $a=0$ 时，$F(x)=\ln x$ 存在零点，$x=1$，满足题意.

（2）当$a>0$时，令$F'(x)=0$，则$x=\frac{1}{a}$.

则$F(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上为增函数，$(\frac{1}{a},+\infty)$上为减函数.

所以$F(x)$的最大值为$F(\frac{1}{a})=\ln\frac{1}{a}-1\geq 0$.

解得$0<a\leq\frac{1}{\mathrm{e}}$.

取$x=1$，$F(1)=-a<0$.

因此当$a\in(0,\frac{1}{\mathrm{e}}]$时，方程$F(x)=0$在$(0,+\infty)$上有解.

所以，$a$的最大值是$\frac{1}{\mathrm{e}}$. ……8 分

另解：函数$f(x)$的定义域为$\{x|x>0\}$.

$f'(x)=1+\ln x$，$g'(x)=ax+1$.

则$f'(m)=1+\ln m$，$g'(m)=am+1$.

因为$l_1 /\!/ l_2$，则$f'(m)=g'(m)$在$(0,+\infty)$上有解.

即$\ln m=am$在$(0,+\infty)$上有解.

因为$m>0$，所以$a=\frac{\ln m}{m}$.

令$F(x)=\frac{\ln x}{x}$（$x>0$）.

$F'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}=0$.

得$x=\mathrm{e}$.

当$x\in(0,\mathrm{e})$，$F'(x)>0$，$F(x)$为增函数；

当$x\in(\mathrm{e},+\infty)$，$F'(x)<0$，$F(x)$为减函数；

所以$F(x)_{\max}=F(\mathrm{e})=\frac{1}{\mathrm{e}}$.

所以，$a$的最大值是$\frac{1}{\mathrm{e}}$. ……8 分

（Ⅱ）$h(x)=x\ln x-\frac{a}{2}x^2-x+a\quad(x>0)$,

$h'(x)=\ln x-ax$.

因为$x_1,x_2$为$h(x)$在其定义域内的两个不同的极值点，

所以$x_1,x_2$是方程$\ln x-ax=0$的两个根.

即$\ln x_1=ax_1$，$\ln x_2=ax_2$.

两式作差得，$a=\dfrac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}$.

因为$\lambda>0,\ 0<x_1<x_2$，由$\lambda\ln x_2-\lambda>1-\ln x_1$，得$1+\lambda<\ln x_1+\lambda\ln x_2$.　　则

$$1+\lambda<a(x_1+\lambda x_2)\Leftrightarrow a>\frac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln x_1-\ln x_2}{x_1-x_2}>\frac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{x_1}{x_2}<\frac{(1+\lambda)(x_1-x_2)}{x_1+\lambda x_2}.$$

令$t=\dfrac{x_1}{x_2}$，则$t\in(0,1)$，由题意知:

$\ln t<\dfrac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$在$t\in(0,1)$上恒成立，

令$\varphi(t)=\ln t-\dfrac{(1+\lambda)(t-1)}{t+\lambda}$，

则$\varphi'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{(1+\lambda)^2}{(t+\lambda)^2}=\dfrac{(t-1)(t-\lambda^2)}{t(t+\lambda)^2}$.

（1）　当$\lambda^2\geq1$，即$\lambda\geq1$时，

$\forall t\in(0,1)$，$\varphi'(t)>0$，所以$\varphi(t)$在$(0,1)$上单调递增.

又$\varphi(1)=0$，则$\varphi(t)<0$在$(0,1)$上恒成立.

（2）　当$\lambda^2<1$，即$0<\lambda<1$时，

$t\in(0,\lambda^2)$时，$\varphi'(t)>0$，$\varphi(t)$在$(0,\lambda^2)$上为增函数；

当$t\in(\lambda^2,1)$时，$\varphi'(t)<0$，$\varphi(t)$在$(\lambda^2,1)$上为减函数.

又$\varphi(1)=0$，所以$\varphi(t)$不恒小于$0$，不合题意.

综上，$\lambda\in[1,+\infty)$.　　……13 分