2017 北京房山高三二模

数　　学（理）

本试卷共 5 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题纸上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题纸一并交回。

第一部分 （选择题 共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）设集合 $A=\{x\,|\,x\le 2\}, B=\{x\,|\,0<x<3\}$，则 $A\cup B=$

（A）$\{x|x\le 2\}$　　（B）$\{x\,|\,x<3\}$

（C）$\{x\,|\,2<x<3\}$　　（D）$\{x\,|\,2\le x<3\}$

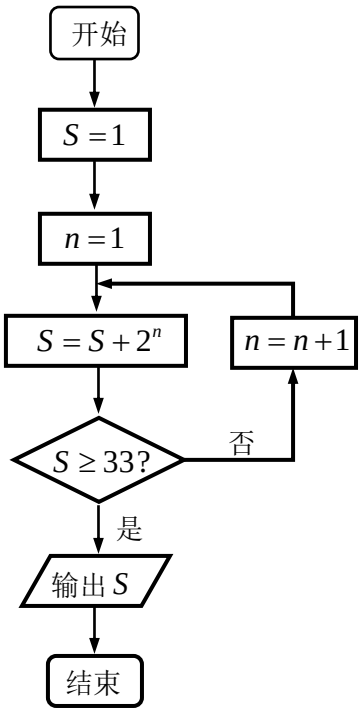
（2）若复数 $\mathrm{i}z=-1+\mathrm{i}$，则复数 z 在复平面内对应的点位于

（A）第一象限　　（B）第二象限　　（C）第三象限　　（D）第四象限

（3）执行如图的程序框图，输出的 S 值为

（A）65　　（B）64

（C）63　　（D）33



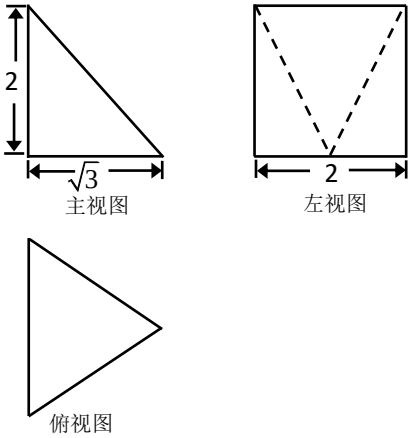
（4）已知实数 x, y 满足 $\begin{cases} x+y-1\ge 0, \\ x\ge 0, \\ y\ge 0, \end{cases}$ 则 $\sqrt{x^2+y^2}$ 的取值范围是

（A）$(0,1)$　　（B）$(0,1]$　　（C）$[1,+\infty)$　　（D）$\left[\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$

（5）已知函数 $f(x)$ 的图像关于原点对称，且周期为 4，若 $f(-1)=2$，则 $f(2017)=$（　　）

（A）2　　（B）0　　（C）-2　　（D）-4

（6）已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的最长棱为



（A）4　　（B）$2\sqrt{2}$　　（C）$\sqrt{7}$　　（D）2

（7）ΔABC 的三个内角分别为 A，B，C，则“$B=\frac{\pi}{3}$”是“A，B，C 成等差数列”的

（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（8）定义：若存在常数 k，使得对定义域 D 内的任意两个 $x_1, x_2\ (x_1 \neq x_2)$，均有 $\left|f(x_1)-f(x_2)\right| \leq k\left|x_1-x_2\right|$ 成立，则称函数 $f(x)$ 在定义域 D 上满足利普希茨条件. 若函数 $f(x)=\sqrt{x}\ (x \geq 1)$ 满足利普希茨条件，则常数 k 的最小值为

（A）4　　（B）3　　（C）1　　（D）$\frac{1}{2}$

第二部分　（非选择题　共110分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的一条渐近线方程为 $x-2y=0$，则该双曲线的离心率为_____.

（10）若平面向量 $\vec{a}=(4,2)$，$\vec{b}=(-2,\ m)$，且 $\vec{a} \perp (\vec{a}+\vec{b})$，则实数 m 的值为_____.

（11）　在 $(x+m)^5$ 的展开式中，含 x^2 项的系数为-10，则实数 m 的值为_____.

（12）设点 A 是曲线 $\begin{cases}x=\sqrt{3}+\cos\theta\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 是参数）上的点，则点 A 到坐标原点的最大距离是_____.

（13）能够说明“$e^x > x+1$ 恒成立”是假命题的一个 x 的值为_____.

（14）已知函数 $f(x)=x|2x-a|-1$.

①当 $a=0$ 时，不等式 $f(x)+1>0$ 的解集为_____；

②若函数 $f(x)$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（本小题13 分）

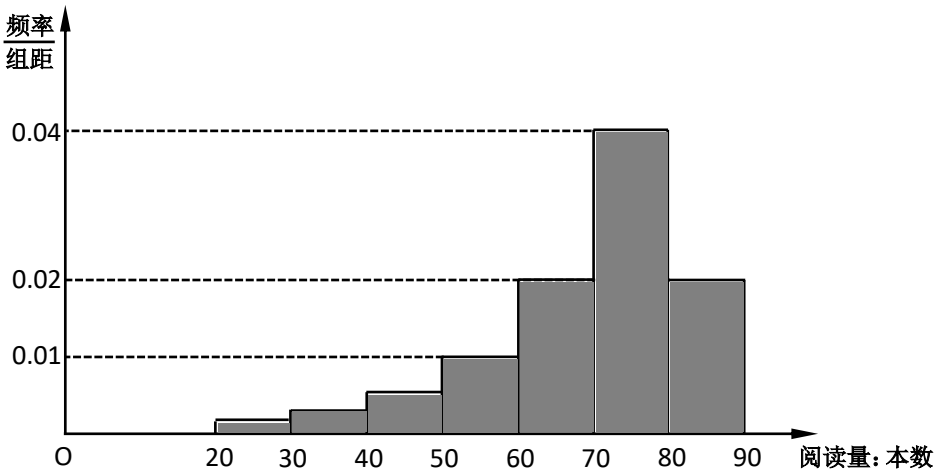
已知函数 $f(x)=\sin x-a\cos x$ 的一个零点是 $\frac{\pi}{4}$.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）设 $g(x)=f(x)\cdot f(-x)+2\sqrt{3}\sin x\cos x$，若 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，求 $g(x)$ 的值域.

（16）（本小题13 分）

1995 年联合国教科文组织宣布每年的 4 月 23 日为世界读书日，主旨宣言为“希望散居在全球各地的人们，都能享受阅读带来的乐趣，都能尊重和感谢为人类文明作出巨大贡献的文学、文化、科学思想的大师们，都能保护知识产权。”为了解大学生课外阅读情况，现从某高校随机抽取100 名学生，将他们一年课外阅读量（单位：本）的数据，分成 7 组 $[20,30)$，$[30,40)$，…，$[80,90)$，并整理得到如下频率分布直方图：



（Ⅰ）估计其阅读量小于 60 本的人数；

（Ⅱ）已知阅读量在 $[20,30)$，$[30,40)$，$[40,50)$ 内的学生人数比为 $2:3:5$. 为了解学生阅读课外书的情况，现从阅读量在 $[20,40)$ 内的学生中随机选取 3 人进行调查座谈，用 X 表示所选学生阅读量在 $[20,30)$ 内的人数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）假设同一组中的每个数据可用该组区间的中点值代替，试估计100 名学生该年课外阅读量的平均数在第几组（只需写出结论）.

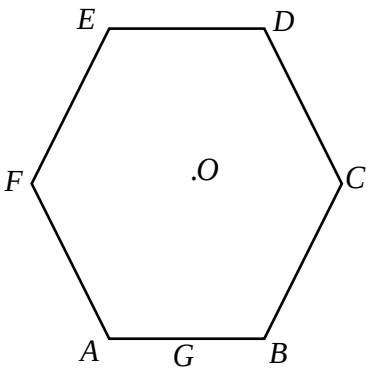
（17）（本小题14分）

如图1，正六边形 $ABCDEF$ 的边长为2，O 为中心，G 为 AB 的中点. 现将四边形 $DEFC$ 沿 CF 折起到四边形 D_1E_1FC 的位置，使得平面 $ABCF \perp$ 平面 D_1E_1FC，如图2.

（Ⅰ）证明：$D_1F \perp$ 平面 E_1OG；

（Ⅱ）求二面角 E_1-OG-F 的大小；

（Ⅲ）在线段 CD_1 上是否存在点 H，使得 $BH//$ 平面 E_1OG？如果存在，求出 $\dfrac{D_1H}{D_1C}$ 的值；如果不存在，请说明理由.



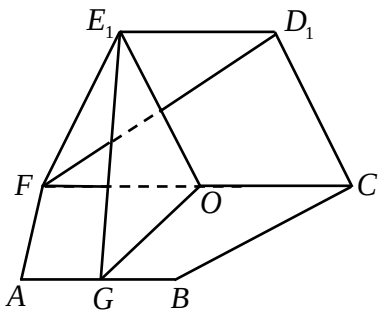


图2

（18）（本小题13分）

设函数 $f(x)=x(k-\ln x)$，（k 为常数），$g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}f(x)$. 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行.

（Ⅰ）求 k 的值；

（Ⅱ）求 $g(x)$ 的单调区间和最小值；

（Ⅲ）若 $g(a)-g(x)<\dfrac{1}{a}$ 对任意 $x>0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

(19)（本小题14分）

已知椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{1}{2}$，$O$为坐标原点，$F$是椭圆$C$的右焦点，$A$为椭圆$C$上一点，且$AF\perp x$轴，$\Delta AFO$的面积为$\frac{3}{4}$.

（Ⅰ）求椭圆C的方程；

（Ⅱ）过C上一点$P(x_0,y_0)(y_0\neq 0)$的直线l：$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1$与直线$AF$相交于点$M$，与直线$x=4$相交于点$N$. 证明：当点$P$在$C$上移动时，$\frac{|MF|}{|NF|}$恒为定值，并求此定值.

（20）（本小题13分）

已知集合$A=\{a_1,a_2,a_3,...a_n\}$，其中$i\in \mathbf{N}^+, 1\le i\le n, n>2$，$1(A)$表示$a_i+a_j(1\le i<j\le n)$中所有不同值的个数.

（Ⅰ）设集合$P=\{2,4,6,8\}, Q=\{2,4,8,16\}$，分别求$1(P)$和$1(Q)$；

（Ⅱ）若集合$A=\{2,4,8,...,2^n\}$，求证：$1(A)=\frac{n(n-1)}{2}$；

（Ⅲ）$1(A)$是否存在最小值？若存在，求出这个最小值；若不存在，请说明理由.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

题号	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
答案	B	A	C	D	C	B	C	D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

(9) $\frac{\sqrt{5}}{2}$　(10) -6　(11) -1　(12) 3　(13) 0　(14) ①$(0,+\infty)$；②$a>2\sqrt{2}$

8. 设 $x_1<x_2$，$\because |f(x_1)-f(x_2)|\le k|x_1-x_2|$，$\therefore \frac{|f(x_1)-f(x_2)|}{|x_1-x_2|}\le k$

$\therefore k\ge \frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{x_2-x_1}=\frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$（分子有理化）

$\because x\ge 1$, 且$x_1\ne x_2, \therefore 0<\frac{1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}<\frac{1}{2}$，$\therefore k\ge\frac{1}{2}$

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

（15）（Ⅰ）解：依题意，得 $f(\frac{\pi}{4})=0$，　……1 分

即 $\sin\frac{\pi}{4}-a\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}a}{2}=0$，　……3 分

解得 $a=1$.　……5 分

（Ⅱ）解：由（Ⅰ）得 $f(x)=\sin x-\cos x$.

$g(x)=f(x)\cdot f(-x)+2\sqrt{3}\sin x\cos x$　……6 分

$=(\sin x-\cos x)(-\sin x-\cos x)+\sqrt{3}\sin 2x$　……7 分

$=(\cos^2 x-\sin^2 x)+\sqrt{3}\sin 2x$　……8 分

$=\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$　……9 分

$=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$.　……10 分

由 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 得 $\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{7\pi}{6}$

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时，$g(x)$ 取得最大值 2，　……11 分

当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ 即 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$g(x)$ 取得最小值-1.　……12 分

所以 $g(x)$ 的值域是 $[-1,2]$　……13 分

（16）解：（Ⅰ）100-100×10×（0.04+0.02×2）=20（人） ……3 分

（Ⅱ）由已知条件可知：

$[20,50)$ 内人数为：100-100×10×（0.04+0.02+0.02+0.01）=10

$[20,\ 30)$ 人数为 2 人，$[30,\ 40)$ 人数为 3 人，$[40,50)$ 人数为 5 人. ……6 分

X 的可能取值为 0, 1, 2

$P(X=0)=\frac{C_3^3C_2^0}{C_5^3}=\frac{1}{10}$ $P(X=1)=\frac{C_3^2C_2^1}{C_5^3}=\frac{3}{5}$ $P(X=2)=\frac{C_3^1C_2^2}{C_5^3}=\frac{3}{10}$ ……8 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

……10 分

$EX=0\times\frac{1}{10}+1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}=\frac{6}{5}$ ……11 分

（Ⅲ）第五组 ……13 分

（17）（Ⅰ）证:图（1）中 $OG\perp CF$

$\therefore$ 图（2）中，$OG\perp CF$

又面 $CD_1E_1F\perp$ 面 $ABCF$，面 $CD_1E_1F\cap$ 面 $ABCF=CF$

$\therefore OG\perp$ 面 CD_1E_1F

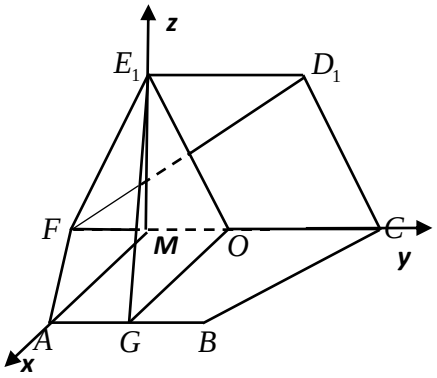
$\because D_1F\subset$ 面 CD_1E_1F $\therefore OG\perp D_1F$

又 O 为 CF 的中点 $\therefore OF\underline{//}\ D_1E_1$，又 $E_1D_1=E_1F$

$\therefore$ 四边形 E_1D_1OF 为菱形

$\therefore D_1F\perp OE_1$

$\because OG\cap OE_1=O$ $\therefore D_1F\perp$ 面 E_1OG ……5 分



（Ⅱ）取 OF 的中点 M，连接 E_1M，MA, 以点 M 为坐标原点，建立空间直角坐标系 M-xyz 如图所示.

$E_1(0,0,\sqrt{3}),\mathrm{O}(0,1,0),\mathrm{G}(\sqrt{3},1,0),\mathrm{F}(0,-1,0)$

$\therefore\overrightarrow{OG}=(\sqrt{3},0,0),\overrightarrow{OE_1}=(0,-1,\sqrt{3})$

设面 OE_1G 的法向量为 $\vec{n}$

$\therefore\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{OG}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{OE_1}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{3}x=0\\ -y+\sqrt{3}z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt{3}z\end{cases}$，令 $z=1$, 则 $y=\sqrt{3}$，$\therefore\vec{n}=(0,\sqrt{3},1)$

设面 FOG 的法向量为 $\vec{m}$，则 $\vec{m}=(0,0,1)$

$\therefore \cos<\vec{m},\vec{n}>=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 二面角 E_1-OG-F 的大小为 $\dfrac{\pi}{3}$ ……10 分

（Ⅲ）假设存在，设 $H(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z})$，$\dfrac{D_1H}{D_1C}=\lambda,\lambda\in[0,1]$

$\therefore \overrightarrow{D_1H}=\lambda\overrightarrow{D_1C}$

$D_1(0,2,\sqrt{3}),\mathrm{C}(0,3,0),\mathrm{B}(\sqrt{3},2,0)$

$\therefore \overrightarrow{D_1H}=(\mathrm{x},\mathrm{y}-\sqrt{2},\mathrm{z}-\sqrt{3}),\overrightarrow{D_1C}=(0,1,-\sqrt{3})$

$\therefore \begin{cases} x=0 \\ y-2=\lambda \\ z-\sqrt{3}=-\lambda\sqrt{3} \end{cases} \therefore \begin{cases} x=0 \\ y=2+\lambda \\ z=\sqrt{3}-\lambda\sqrt{3} \end{cases} \therefore H(0,2+\lambda,\sqrt{3}-\lambda\sqrt{3}) \therefore \overrightarrow{BH}=(-\sqrt{3},\lambda,\sqrt{3}-\lambda\sqrt{3})$

$\because \overrightarrow{BH}\cdot\vec{n}=0 \therefore \sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda=0 \therefore \sqrt{3}=0$ 矛盾 $\therefore$ 不存在 ……14 分

（19）解：（Ⅰ）$f(x)=x(k-\ln x)$

$f'(x)=k-\ln x-1$，因为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与 x 轴平行

所以 $f'(x)=0$，

所以 $k=1$ ……5 分

（Ⅱ）$g(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}f(x)=\dfrac{1}{x}-1+\ln x$，定义域为 $\{x|x>0\}$

$g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}f(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x^2}$

令 $g'(x)=0$ 得 $x=1$，当 x 变化时，$g'(x)$ 和 $g(x)$ 的变化如下表

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	0	↗

由上表可知 $g(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$，

最小值为 $g(1)=0$。 ．…… 10 分

（Ⅲ）若 $g(a)-g(x)<\frac{1}{a}$ 对任意 $x>0$ 成立，则 $g(a)-g(x)_{\min}<\frac{1}{a}$

即 $\ln a<1$，解得 $0<a<e$ ． …… 13 分

（19）（Ⅰ）设 $F(c,0)$， $A(c,d)$ 则 $\frac{c^2}{a^2}+\frac{d^2}{b^2}=1$

又 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$ $\therefore|d|=\frac{\sqrt{3}}{2}b$

因 ΔAFO 的面积为 $\frac{3}{4}$

$\therefore\frac{1}{2}c|d|=\frac{1}{2}c\bullet\frac{\sqrt{3}}{2}b=\frac{3}{4},bc=\sqrt{3}$

由 $\begin{cases}a^2-b^2=c^2\\a=2c\\bc=\sqrt{3}\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=2\\b=\sqrt{3}\\c=1\end{cases}$

所以 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ ……5 分

（Ⅱ）由(1)知直线 l 的方程为 $\frac{x_0x}{4}+\frac{y_0y}{3}=1$ （$y_0\neq0$），即 $y=\frac{12-3x_0x}{4y_0}$ （$y_0\neq0$）.

因为直线 AF 的方程为 $x=1$，所以直线 l 与 AF 的交点为 $M(1,\frac{12-3x_0}{4y_0})$，

直线 l 与直线 $x=4$ 的交点为 $N(4,3-3x_0)$，

则 $\frac{|MF|^2}{|NF|^2}=\frac{(\frac{12-3x_0}{4y_0})^2}{9+(\frac{3-3x_0}{y_0})^2}=\frac{(4-x_0)^2}{16y_0^2+16(1-x_0)^2}$

又 $P(x_0，y_0)$ 是 C 上一点，则 $\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{3}=1.\ y_0^2=3-\frac{3x_0^2}{4}$

代入上式得

$\frac{|MF|^2}{|NF|^2}==\frac{(4-x_0)^2}{48-12x_0^2+16-32x_0+16x_0^2}=\frac{(4-x_0)^2}{4(x_0^2-8x_0+16)}=\frac{1}{4}\bullet\frac{(4-x_0)^2}{(4-x_0)^2}=\frac{1}{4}$

所以 $\frac{|MF|}{|NF|}=\frac{1}{2}$，为定值. ……14 分

（20）解：（Ⅰ）由 $2+4=6,2+6=8,2+8=10,4+6=10,4+8=12,6+8=14$ 得 $1(\mathrm{P})=5$

由 $2+4=6,2+8=10,2+16=18,4+8=12,4+16=20,8+16=24$ 得 $1(\mathrm{Q})=6$

……3 分

（Ⅱ）证明：$\because a_i+a_j\left(1\le i<j\le n\right)$最多有$C_n^{\ 2}=\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$个值，

$\therefore 1\left(A\right)\le\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$，

又集合$A=\left\{2,4,8,...,2^n\right\}$，任取$a_i+a_j,a_k+a_l\left(1\le i<j\le n,1\le k<l\le n\right)$，

当$j\ne1$时，不妨设$j<1$，则$a_i+a_j<2a_j=2^{j+i}\le a_1<a_k+a_1$，

即$a_i+a_j\ne a_k+a_1$，

当$j=1,i\ne k$时，$a_i+a_j\ne a_k+a_1$，

$\therefore$当且仅当$i=k,j=1$时 $a_i+a_j=a_k+a_1$，

即所有$a_i+a_j\left(1\le i<j\le n\right)$的值两两不同，

$\therefore 1\left(A\right)=\dfrac{n\left(n-1\right)}{2}$，　　……9分

（Ⅲ）$1\left(A\right)$存在最小值，且最小值为$2n-3$，

不妨设$a_1<a_2<a_3<...<a_n$，可得$a_1+a_2+a_1+a_3<...<a_1+a_n<a_2+a_n<...<a_{n-1}+a_n$，，

$\therefore a_i+a_j\left(1\le i<j\le n\right)$中至少有$2n-3$个不同的数，即$1\left(A\right)\ge2n-3$，

取$A=\left\{1,2,3,...,n\right\}$，则，$a_i+a_j\in\left\{3,4,5,...,2n-1\right\}$，，即$a_i+a_j$的不同值共有$2n-3$个，

故$1\left(A\right)$的最小值为$2n-3$．　　……13分