2017 北京丰台高三二模

数　　学（理）

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x|1\le x\le 4\}$，$B=\{x|x>2\}$，那么 $A\cup B=$

（A）$(2,4)$　　（B）$(2,4]$　　（C）$[1,+\infty)$　　（D）$(2,+\infty)$

2. 下列函数中，既是偶函数又是 $(0,+\infty)$ 上的增函数的是

（A）$y=-x^3$　　（B）$y=2^{|x|}$　　（C）$y=x^{\frac{1}{2}}$　　（D）$y=\log_3(-x)$

3. 在极坐标系中，点 $(\sqrt{2},\frac{\pi}{4})$ 到直线 $\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$ **错误!未找到引用源。**的距离等于

（A）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）$\frac{3\sqrt{2}}{2}$　　（D）2

4. 下列双曲线中，焦点在 y 轴上且渐近线方程为 $y=\pm\frac{1}{2}x$ 的是

（A）$x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　（B）$\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　（C）$\frac{y^2}{4}-x^2=1$　　（D）$y^2-\frac{x^2}{4}=1$

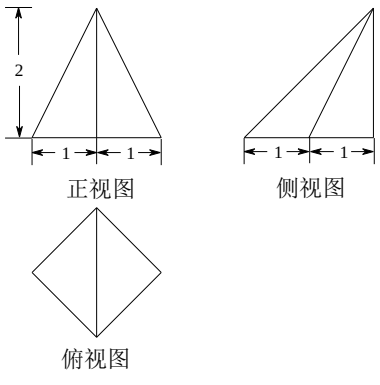
5. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为

（A）$\frac{\pi}{4}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{\pi}{2}$　　（D）$\frac{2\pi}{3}$

6. 一个几何体的三视图如图所示，其中俯视图为正方形，则该几何体最大的侧面的面积为

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$

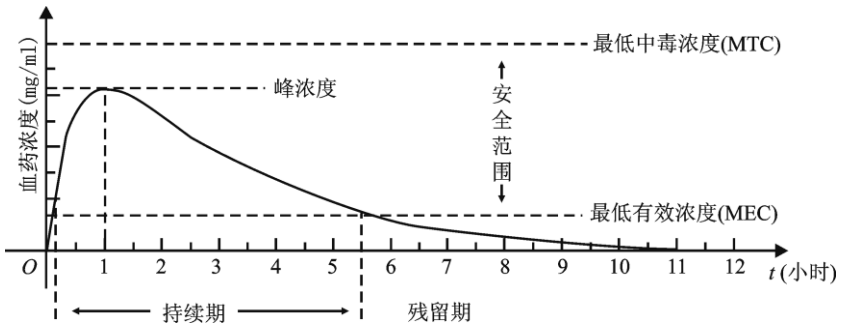
（C）$\sqrt{3}$　　（D）2



7. $S(A)$ 表示集合 A 中所有元素的和，且 $A\subseteq\{1,2,3,4,5\}$，若 $S(A)$ 能被 3 整除，则符合条件的非空集合 A 的个数是

（A）10　　（B）11　　（C）12　　（D）13

8. 血药浓度（Plasma Concentration）是指药物吸收后在血浆内的总浓度．药物在人体内发挥治疗作用时，该药物的血药浓度应介于最低有效浓度和最低中毒浓度之间.已知成人单次服用 1 单位某药物后，体内血药浓度及相关信息如图所示：



根据图中提供的信息，下列关于成人使用该药物的说法中，不正确的个数是

①首次服用该药物 1 单位约 10 分钟后，药物发挥治疗作用

②每次服用该药物 1 单位，两次服药间隔小于 2 小时，一定会产生药物中毒

③每间隔 5.5 小时服用该药物 1 单位，可使药物持续发挥治疗作用

④首次服用该药物 1 单位 3 小时后，再次服用该药物 1 单位，不会发生药物中毒

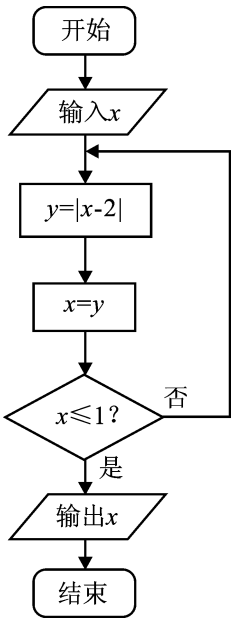
（A）1 个　　（B）2 个　　（C）3 个　　（D）4 个

第二部分　（非选择题　共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 在复平面内，复数 $\frac{3+4\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$ 对应的点的坐标为_____.

10. 执行右图所示的程序框图，若输入 x 的值为 6，则输出的 x 值为_____.



11. 点 A 从 $(1,0)$ 出发，沿单位圆按逆时针方向运动到点 B，若点 B 的坐标是 $(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$，记 $\angle AOB=\alpha$，则 $\sin 2\alpha=$_____.

12. 若 x，y 满足 $\begin{cases} y\geq 1, \\ y\leq x-1, \\ x+y\leq m, \end{cases}$ 且 $z=x^2+y^2$ 的最大值为 10，

则 $m=$_____.

13. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$．当 $x<0$ 时，$f(x)=\ln(-x)+x$；当 $-\mathrm{e}\leq x\leq \mathrm{e}$ 时，$f(-x)=-f(x)$；当 $x>1$ 时，$f(x+2)=f(x)$，则 $f(8)=$_____.

14. 已知 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，且 $\overrightarrow{BO}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$.

①若 $\angle C=90^\circ$，则 $\lambda+\mu=$_____；②若 $\angle ABC=60^\circ$，则 $\lambda+\mu$ 的最大值为_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题共 13 分）

在锐角 $\triangle ABC$ 中，$2a\sin B=b$.

（Ⅰ）求 $\angle A$ 的大小；

（Ⅱ）求 $\sqrt{3}\sin B-\cos(C+\frac{\pi}{6})$ 的最大值.

16.（本小题共 13 分）

某社区超市购进了 A,B,C,D 四种新产品，为了解新产品的销售情况，该超市随机调查了 15 位顾客（记为 $a_i, i=1,2,3,\cdots,15$ ）购买这四种新产品的情况，记录如下（单位：件）：

产品＼顾客	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}
A	1			1				1			1			1	
B		1		1		1		1	1		1		1		1
C	1			1	1			1		1		1			1
D		1		1		1	1			1			1		

（Ⅰ）若该超市每天的客流量约为 300 人次，一个月按 30 天计算，试估计产品 A 的月销售量（单位：件）；

（Ⅱ）为推广新产品，超市向购买两种以上（含两种）新产品的顾客赠送 2 元电子红包 . 现有甲、乙、丙三人在该超市购物，记他们获得的电子红包的总金额为 X，

求随机变量 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）若某顾客已选中产品 B，为提高超市销售业绩，应该向其推荐哪种新产品？（结果不需要证明）

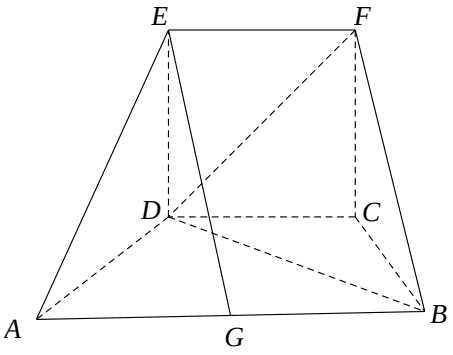
17.（本小题共 14 分）

如图所示的几何体中，四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，$AB \parallel CD$，$AB=2AD=2$，$\angle DAB=60^\circ$，四边形 $CDEF$ 为正方形，平面 $CDEF \perp$ 平面 $ABCD$.

（Ⅰ）若点 G 是棱 AB 的中点，求证：$EG \parallel$ 平面 BDF ；

（Ⅱ）求直线 AE 与平面 BDF 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在线段 FC 上是否存在点 H，使平面 $BDF \perp$ 平面 HAD？若存在，求 $\frac{FH}{HC}$ 的值；若不存在，说明理由.



18.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}-a\ln x-a$.

（Ⅰ）当 $a=\mathrm{e}$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）证明：对于 $\forall a\in(0,\mathrm{e})$，$f(x)$ 在区间 $(\frac{a}{\mathrm{e}},1)$ 上有极小值，且极小值大于 0.

19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 E 的右焦点与抛物线 $y^2=4x$ 的焦点重合，点 $M(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆 E 上.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设 $P(-4,0)$，直线 $y=kx+1$ 与椭圆 E 交于 A,B 两点，若直线 PA,PB 均与圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 相切，求 k 的值.

20.（本小题共 13 分）

若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足：$\exists k\in\mathbf{N}^*$，对于 $\forall n\geq n_0(n_0\in\mathbf{N}^*)$，都有 $a_{n+k}-a_n=d$（其中 d 为常数），则称 $\{a_n\}$ 具有性质“$P(k,n_0,d)$”.

（Ⅰ）若 $\{a_n\}$ 具有性质“$P(3,2,0)$”，且 $a_2=3$，$a_4=5$，$a_6+a_7+a_8=18$，求 a_3；

（Ⅱ）若无穷数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，无穷数列 $\{c_n\}$ 是公比为正数的等比数列，$b_1=c_3=2$，$b_3=c_1=8$，$a_n=b_n+c_n$，判断 $\{a_n\}$ 是否具有性质“$P(2,1,0)$”，并说明理由；

（Ⅲ）设 $\{a_n\}$ 既具有性质“$P(i,2,d_1)$”，又具有性质“$P(j,2,d_2)$”，其中 $i,j\in\mathbf{N}^*$，$i<j$，i,j 互质，求证：$\{a_n\}$ 具有性质“$P(j-i,i+2,\frac{j-i}{i}d_1)$”.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	D	B	C	B	A

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9．$(4,-3)$　　10．0　　11．$-\frac{24}{25}$

12．4　　13．$2-\ln 2$　　14．$\frac{1}{2}$；$\frac{2}{3}$

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）由正弦定理得 $2\sin A\sin B=\sin B$，……2 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $\sin B>0$，从而 $2\sin A=1$，……3 分

所以 $\sin A=\frac{1}{2}$.

因为锐角 $\triangle ABC$，

所以 $A=\frac{\pi}{6}$.……6 分

（Ⅱ）因为 $\sqrt{3}\sin B-\cos(C+\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\sin B-\cos(A+C)$……7 分

$=\sqrt{3}\sin B+\cos B$……9 分

$=2\sin(B+\frac{\pi}{6})$……11 分当 $B=\frac{\pi}{3}$ 时，

$\sqrt{3}\sin B-\cos(C+\frac{\pi}{6})$ 有最大值 2，

与锐角 $\triangle ABC$ 矛盾，故 $\sqrt{3}\sin B-\cos(C+\frac{\pi}{6})$ 无最大值……13 分

16.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$\frac{5}{15}\times 300\times 30=3000$（件），……3 分

答：产品 A 的月销售量约为 3000 件.……4 分

（Ⅱ）顾客购买两种（含两种）以上新产品的概率为 $P=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.……5 分

X 可取 0，2，4，6，……6 分

$P(X=0)=(\frac{2}{5})^3=\frac{8}{125}$，　$P(X=2)=C_3^1(\frac{2}{5})^2\frac{3}{5}=\frac{36}{125}$，

$P(X=4)=C_3^2(\frac{3}{5})^2\frac{2}{5}=\frac{54}{125}$，　$P(X=6)=(\frac{3}{5})^3=\frac{27}{125}$，

所以 X 的分布列为：

X	0	2	4	6
P	$\frac{8}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{27}{125}$

.……8 分

所以 $E(X)=0\times\frac{8}{125}+2\times\frac{36}{125}+4\times\frac{54}{125}+6\times\frac{27}{125}=\frac{450}{125}=\frac{18}{5}$. . . ……10 分

（Ⅲ）产品 D . ……13 分

17.（本小题共 14 分）

（Ⅰ）**证明：**由已知得 $EF//CD$，且 $EF=CD$.

因为 $ABCD$ 为等腰梯形，所以有 $BG//CD$.

因为 G 是棱 AB 的中点，所以 $BG=CD$.

所以 $EF//BG$，且 $EF=BG$，

故四边形 $EFBG$ 为平行四边形,

所以 $EG//FB$. ……2 分

因为 $FB\subset$ 平面 BDF， $EG\not\subset$ 平面 BDF，

所以 EG //平面 BDF . ……4 分

解：（Ⅱ）因为四边形 $CDEF$ 为正方形，所以 $ED\perp DC$.

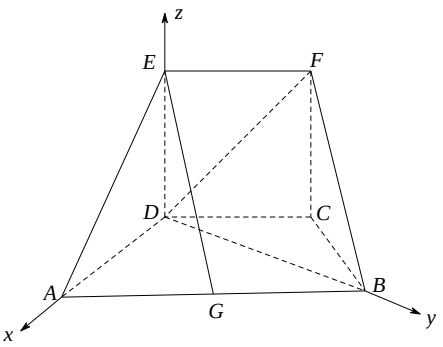
因为平面 $CDEF\perp$ 平面 $ABCD$，

平面 $CDEF\cap$ 平面 $ABCD=DC$，

$DE\subset$ 平面 $CDEF$，

所以 $ED\perp$ 平面 $ABCD$.

在△ ABD 中，因为 $\angle DAB=60^{\circ}$， $AB=2AD=2$，



所以由余弦定理，得 $BD=\sqrt{3}$，

所以 $AD\perp BD$. ……5 分

在等腰梯形 $ABCD$ 中，可得 $DC=CB=1$.

如图, 以 D 为原点，以 DA，DB，DE 所在直线分别为 x,y,z 轴，

建立空间坐标系， ……6 分

则 $D(0,0,0)$， $A(1,0,0)$， $E(0,0,1)$， $B(0,\sqrt{3},0)$， $F(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$ ，

所以 $\overrightarrow{AE}=(-1,0,1)$， $\overrightarrow{DF}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1)$， $\overrightarrow{DB}=(0,\sqrt{3},0)$.

设平面 BDF 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DB}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DF}=0.\end{cases}$ ……7 分

所以 $\begin{cases}\sqrt{3}y=0\\ -\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y+z=0\end{cases}$，取 $z=1$，则 $x=2,y=0$，得 $\boldsymbol{n}=(2,0,1)$．　　……8 分

设直线 AE 与平面 BDF 所成的角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\langle\overrightarrow{AE},\boldsymbol{n}\rangle\right|=\frac{\left|\overrightarrow{AE}\cdot\boldsymbol{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AE}\right|\cdot|\boldsymbol{n}|}$，

$=\frac{\sqrt{10}}{10}$　　……9 分

所以 AE 与平面 BDF 所成的角的正弦值为 $\frac{\sqrt{10}}{10}$．　　……10 分

（Ⅲ）线段 FC 上不存在点 H，使平面 $BDF\perp$ 平面 HAD．证明如下：　　……11 分

假设线段 FC 上存在点 H，设 $H(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},t)\ (0\le t\le 1)$，

则 $\overrightarrow{DH}=(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},t)$．

设平面 HAD 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$，由 $\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DH}=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}a=0\\ -\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b+tc=0\end{cases}$，

取 $c=1$，则 $a=0,b=-\frac{2}{\sqrt{3}}t$，得 $\boldsymbol{m}=(0,-\frac{2}{\sqrt{3}}t,1)$．　　……12 分

要使平面 $BDF\perp$ 平面 HAD，只需 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=0$，　　……13 分

即 $2\times0-\frac{2}{\sqrt{3}}t\times0+1\times1=0$，　此方程无解．

所以线段 FC 上不存在点 H，使平面 $BDF\perp$ 平面 HAD．　　……14 分

18.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）　$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，　　……1 分

因为 $a=\mathrm{e}$，所以 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}(\ln x+1)$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{\mathrm{e}}{x}$．　　……2 分

因为 $f(1)=0$，　$f'(1)=0$，　　……3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $y=0$．　　……4 分

（Ⅱ）　因为 $0<a<\mathrm{e}$，所以 $f'(x)=\mathrm{e}^x-\frac{a}{x}$ 在区间 $(\frac{a}{\mathrm{e}},1)$ 上是单调递增函数．　　……5 分

因为 $f'(\frac{a}{\mathrm{e}})=\mathrm{e}^{\frac{a}{\mathrm{e}}}-\mathrm{e}<0$，　$f'(1)=\mathrm{e}-a>0$，　　……6 分

所以 $\exists x_0\in(\frac{a}{\mathrm{e}},1)$，使得 $\mathrm{e}^{x_0}-\frac{a}{x_0}=0$．　　……7 分

所以 $\forall x\in(\frac{a}{\mathrm{e}},x_0)$，　$f'(x)<0$；　$\forall x\in(x_0,1)$，　$f'(x)>0$，　　……8 分

故 $f(x)$ 在 $(\frac{a}{\mathrm{e}},x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,1)$ 上单调递增， ……9 分

所以 $f(x)$ 有极小值 $f(x_0)$. ……10 分

因为 $\mathrm{e}^{x_0}-\frac{a}{x_0}=0$，

所以 $f(x_0)=\mathrm{e}^{x_0}-a(\ln x_0+1)=a(\frac{1}{x_0}-\ln x_0-1)$. ……11 分

设 $g(x)=a(\frac{1}{x}-\ln x-1)$， $x\in(\frac{a}{\mathrm{e}},1)$，

则 $g'(x)=a(-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x})=-\frac{a(1+x)}{x^2}$， ……12 分

所以 $g'(x)<0$，

即 $g(x)$ 在 $(\frac{a}{\mathrm{e}},1)$ 上单调递减，所以 $g(x)>g(1)=0$，

即 $f(x_0)>0$，所以函数 $f(x)$ 的极小值大于 0. ……13 分

19.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ） 因为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点坐标为 $(1,0)$，所以 $c=1$， ……1 分

所以 $2a=\frac{3}{2}+\sqrt{(\frac{3}{2})^2+2^2}=4$， ……3 分

即 $a=2$. 因为 $b^2=a^2-c^2=4-1=3$，

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……5 分

（Ⅱ）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，

因为直线 PA， PB 与圆 $x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$ 相切，

所以 $k_{AP}+k_{BP}=0$， ……7 分

即 $\frac{y_1}{x_1+4}+\frac{y_2}{x_2+4}=0$，

通分得 $\frac{y_1(x_2+4)+y_2(x_1+4)}{(x_1+4)(x_2+4)}=0$，

所以 $(kx_1+1)(x_2+4)+(kx_2+1)(x_1+4)=0$，

整理，得 $2kx_1x_2+(4k+1)(x_1+x_2)+8=0$. ① ……9 分

联立 $\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1,\\ y=kx+1,\end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$，

所以 $x_1+x_2=-\frac{8k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=-\frac{8}{3+4k^2}$， ……11 分

代入①，得 $k=1$. ……14 分

20.（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $\{a_n\}$ 具有性质“ $P(3,2,0)$ ”，所以 $a_{n+3}-a_n=0$， $n\geq 2$.

由 $a_2=3$，得 $a_5=a_8=3$，由 $a_4=5$，得 $a_7=5$. ……2 分

因为 $a_6+a_7+a_8=18$，所以 $a_6=10$，即 $a_3=10$. ……4 分

（Ⅱ）$\{a_n\}$ 不具有性质“ $P(2,1,0)$ ”. ……5 分

设等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 d，由 $b_1=2$， $b_3=8$，

得 $2d=8-2=6$，所以 $d=3$，故 $b_n=3n-1$. ……6 分

设等比数列 $\{c_n\}$ 的公比为 q，由 $c_3=2$， $c_1=8$，

得 $q^2=\frac{1}{4}$，又 $q>0$，所以 $q=\frac{1}{2}$，故 $c_n=2^{4-n}$， ……7 分

所以 $a_n=3n-1+2^{4-n}$.

若 $\{a_n\}$ 具有性质“ $P(2,1,0)$ ”，则 $a_{n+2}-a_n=0$， $n\geq 1$.

因为 $a_2=9$， $a_4=12$，所以 $a_2\neq a_4$，

故 $\{a_n\}$ 不具有性质“ $P(2,1,0)$ ”. ……8 分

（Ⅲ）因为 $\{a_n\}$ 具有性质“ $P(i,2,d_1)$ ”，所以 $a_{n+i}-a_n=d_1$， $n\geq 2$. ①

因为 $\{a_n\}$ 具有性质“ $P(j,2,d_2)$ ”，所以 $a_{n+j}-a_n=d_2$， $n\geq 2$. ②

因为 $i,j\in \mathrm{N}^*$， $i<j$， i,j 互质，

所以由①得 $a_{m+ji}=a_m+jd_1$；由②，得 $a_{m+ij}=a_m+id_2$， ……9 分

所以 $a_m+jd_1=a_m+id_2$，即 $d_2=\frac{j}{i}d_1$. ……10 分

②−①，得 $a_{n+j}-a_{n+i}=d_2-d_1=\frac{j-i}{i}d_1$， $n\geq 2$， ……11 分

所以 $a_{n+j-i}-a_n=\frac{j-i}{i}d_1$， $n\geq i+2$， ……12 分

所以 $\{a_n\}$ 具有性质“ $P(j-i,i+2,\frac{j-i}{i}d_1)$ ”. ……13 分