2017 北京丰台高三二模

数　　学（文）

第一部分　（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1. 已知集合 $A=\{x|1\le x\le 4\}$，$B=\{x|x>2\}$，那么 $A\cup B=$

（A）$(2,4)$　　（B）$(2,4]$　　（C）$[1,+\infty)$　　（D）$(2,+\infty)$

2. 下列函数中，既是偶函数又是 $(0,+\infty)$ 上的增函数的是

（A）$y=x^3$　　（B）$y=2^{|x|}$　　（C）$y=-x^2$　　（D）$y=\log_3(-x)$

3. 某校高一 1 班、2 班分别有 10 人和 8 人骑自行车上学，他们每天骑行路程（单位：千米）的茎叶图如图所示：

1 班						2 班			
		9	9	8	0	b	8	9	9
6	5	4	a	0	1	0	0	1	1
			2	0	2				

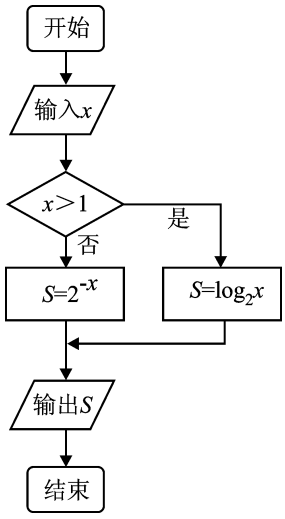
则 1 班 10 人每天骑行路程的极差和 2 班 8 人每天骑行路程的中位数分别是

（A）14，9.5　　（B）9，9　　（C）9，10　　（D）14，9

4. 圆 $(x+1)^2+y^2=1$ 的圆心到直线 $y=x-1$ 的距离为

（A）1　　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　（C）$\sqrt{2}$　　（D）2

5. 执行如图所示的程序框图，若输出的 S 为 4，则输入 x 的值为



（A）-2

（B）16

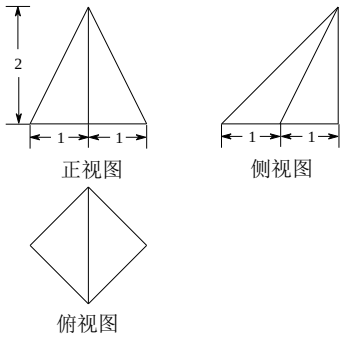
（C）-2 或 8

（D）-2 或 16

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2})$，$\boldsymbol{b}=(\sqrt{3},-1)$，则 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角为

（A）$\frac{\pi}{4}$　　（B）$\frac{\pi}{3}$　　（C）$\frac{\pi}{2}$　　（D）$\frac{2\pi}{3}$

7. 一个几何体的三视图如图所示，其中俯视图为正方形，则最长侧棱（不包括底面的棱）的长度为



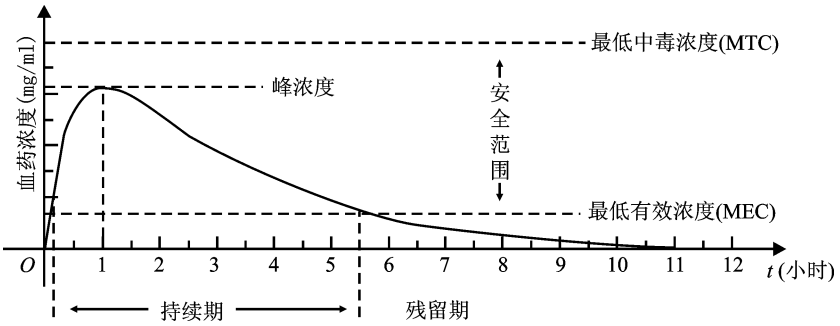
（A）2

（B）$\sqrt{6}$

（C）$2\sqrt{2}$

（D）$2\sqrt{3}$

8. 血药浓度（Plasma Concentration）是指药物吸收后在血浆内的总浓度. 药物在人体内发挥治疗作用时，该药物的血药浓度应介于最低有效浓度和最低中毒浓度之间. 已知成人单次服用 1 单位某药物后，体内血药浓度及相关信息如图所示：



根据图中提供的信息，下列关于成人使用该药物的说法中，不正确的是

（A）首次服用该药物 1 单位约 10 分钟后，药物发挥治疗作用

（B）每次服用该药物 1 单位，两次服药间隔小于 2 小时，一定会产生药物中毒

（C）每间隔 5.5 小时服用该药物 1 单位，可使药物持续发挥治疗作用

（D）首次服用该药物 1 单位 3 小时后，再次服用该药物 1 单位，不会发生药物中毒

第二部分 （非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. 双曲线 $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ 的焦点坐标为_____.

10. 已知复数 $z=(1-\mathrm{i})(\mathrm{i}-2)$，则 $|z|=$_____.

11. 在△ABC 中，角 A，B，C 对应的边长分别是 a，b，c，且 $\sqrt{3}a\sin B=b\cos A$，则角 A 的大小为_____.

12. 若实数 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x\geq 0,\\ y\leq x,\\ x+y+a\leq 0,\end{cases}$ 且 $z=x+3y$ 的最大值为 4，则实数 a 的值为_____.

13. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+2, & x\leq 1,\\ \dfrac{1}{x}+1, & x>1.\end{cases}$ 下列四个命题：

① $f(f(1))>f(3)$；

② $\exists x_0\in(1,+\infty)$，$f'(x_0)=-\frac{1}{3}$；

③ $f(x)$ 的极大值点为 $x=1$；

④ $\forall x_1$，$x_2\in(0,+\infty)$，$|f(x_1)-f(x_2)|\leq 1$

其中正确的有_____.（写出所有正确命题的序号）

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，点 M 不与点 O 重合，称射线 OM 与圆 $x^2+y^2=1$ 的交点 N 为点 M 的“中心投影点”.

（1）点 $M(1,\sqrt{3})$ 的“中心投影点”为_____；

（2）曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 上所有点的“中心投影点”构成的曲线的长度是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. （本小题共 13 分）

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=2$，前 3 项和是 7，等差数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=3$，$2b_2=a_2+a_4$.

（Ⅰ）求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

（Ⅱ）求数列 $\left\{\frac{2}{(2n-1)b_n}\right\}$ 的前 n 项和 S_n.

16.（本小题共 13 分）

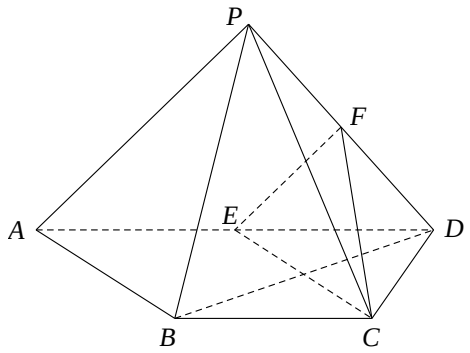
已知函数 $f(x)=\sin x\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\sqrt{3}\cos^2 x$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调递增区间.

17.（本小题共 14 分）

如图，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 平面 PAB，$AD\ //\ BC$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD$，E，F 分别为线段 AD，PD 的中点.



（Ⅰ）求证：CE //平面 PAB；

（Ⅱ）求证：$PD\perp$ 平面 CEF；

（Ⅲ）写出三棱锥 $D-CEF$ 与三棱锥 $P-ABD$ 的体积之比.（结论不要求证明）

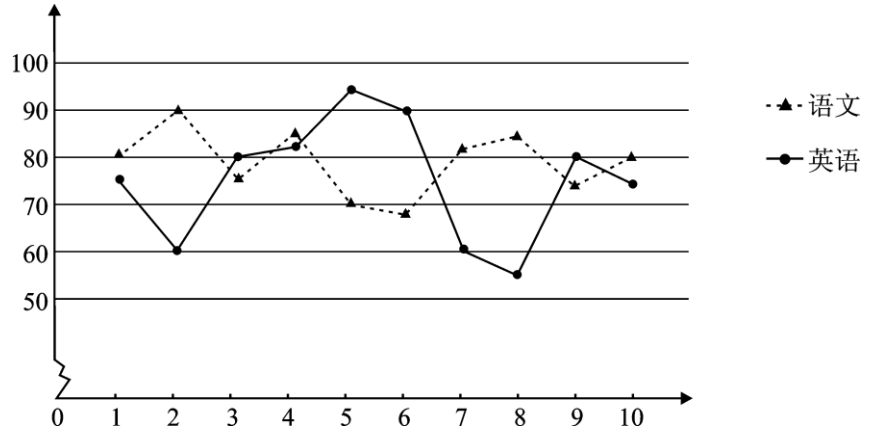
18.（本小题共 13 分）

某校为研究学生语言学科的学习情况，现对高二 200 名学生英语和语文某次考试成绩进行抽样分析．将 200 名学生编号为 001，002，…，200，采用系统抽样的方法等距抽取 10 名学生，将 10 名学生的两科成绩(单位：分)绘成折线图如下：

（Ⅰ）若第一段抽取的学生编号是 006，写出第五段抽取的学生编号；

（Ⅱ）在这两科成绩差超过 20 分的学生中随机抽取 2 人进行访谈，求 2 人成绩均是语文成绩高于英语成绩的概率；

（Ⅲ）根据折线图，比较该校高二年级学生的语文和英语两科成绩，写出你的结论和理由.



19.（本小题共 14 分）

已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，点 $P(4,0)$，过右焦点 F 作与 y 轴不垂直的直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的离心率；

（Ⅱ）求证：以坐标原点 O 为圆心与 PA 相切的圆，必与直线 PB 相切.

20.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=\frac{\ln x}{ax}\ (a>0)$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）若 $f(x)<\frac{1}{\sqrt{x}}$ 恒成立，求 a 的取值范围；

（Ⅲ）证明：总存在 x_0，使得当 $x\in(x_0,+\infty)$，恒有 $f(x)<1$.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	B	A	C	D	B	C	D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9. $(\pm 5,0)$　　10. $\sqrt{10}$　　11. $\frac{\pi}{6}$

12. -2　　13. ①②③④　　14. $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$；$\frac{4\pi}{3}$

三、解答题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15. （本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）由已知，得 $a_1+a_2+a_3=7$，且等比数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q=2$，

所以 $a_1+2a_1+4a_1=7$，解得 $a_1=1$，　……1 分

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2^{n-1}$。　……2 分

由此解得 $a_2=2$，$a_4=8$，　……4 分

则 $b_2=5$，　……5 分

又 $b_1=3$，则等差数列 $\{b_n\}$ 的公差 $d=2$，　……6 分

所以 $b_n=b_1+2(n-1)=2n+1$。　……7 分

（Ⅱ）因为 $\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$，　……9 分

所以 $S_n=(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{7})+\cdots+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，　……11 分

$=1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$，

故数列 $\left\{\frac{2}{(2n-1)b_n}\right\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{2n}{2n+1}$。　……13 分

16. （本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）$f(x)=\sin x\cos x+\frac{\sqrt{3}(\cos 2x+1)}{2}$　……2 分

$=\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$　……3 分

$=\sin(2x+\frac{\pi}{3})+\frac{\sqrt{3}}{2}$　……5 分

$f(x)$ 的最小正周期为 π 。 ……7 分

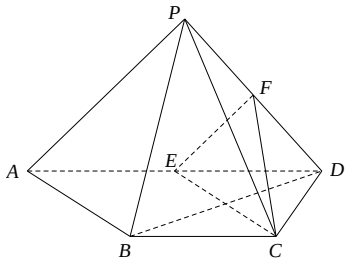
（Ⅱ）由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \le 2x+\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{2}+2k\pi (k\in \mathbf{Z})$ 求得， ……9 分

$-\frac{5\pi}{12}+k\pi \le x \le \frac{\pi}{12}+k\pi (k\in \mathbf{Z})$， ……12 分

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[-\frac{5\pi}{12}+k\pi, \frac{\pi}{12}+k\pi](k\in \mathbf{Z})$ ……13 分

17.（本小题共 14 分）

证明：（Ⅰ）因为 $BC // AD$， $BC=\frac{1}{2}AD$，



E 为线段 AD 的中点，

所以 $AE // BC$ 且 $AE = BC$，

所以四边形 $ABCE$ 为平行四边形，

……2 分

所以 $CE // AB$， ……3 分

又有 $AB \subset$ 平面 PAB， $CE \not\subset$ 平面 PAB，

所以 CE //平面 PAB． ……5 分

（Ⅱ）因为 E， F 分别为线段 AD， PD 中点，所以 $EF // PA$， ……6 分

又因为 $PD \perp$ 平面 PAB， $PA, AB \subset$ 平面 PAB，

所以 $PD \perp AB$， $PD \perp PA$；

所以 $PD \perp EF$， ……8 分

又 $CE // AB$， 所以 $PD \perp CE$ ……9 分因为

$EF \cap CE = E$，

所以 $PD \perp$ 平面 CEF． ……11 分

（III）结论：$\frac{V_{D-CEF}}{V_{P-ABD}}=\frac{1}{4}$． ……14 分

18．（本小题共 13 分）

解：（Ⅰ）第五段抽取的编号是 086 号； ……3 分

（Ⅱ）记：“2 人成绩均是语文成绩高于英语成绩”为事件 A，

这两科成绩差超过 20 分的学生共 5 人，其中语文成绩高于英语成绩的共 3 人，记为 a，b，c，另 2 人记为 1，2.

在 5 人中随机取 2 人共有：（a，b）（a，c）（a，1）（a，2）（b，c）（b，1）（b，2）（c，1）（c，2）（1，2）10 种取法；其中 2 人成绩均是语文成绩高于英语成绩共 3 种.

由古典概型公式得：$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{10}$

所以 2 人成绩均是语文成绩高于英语成绩的概率为$\frac{3}{10}$； ……9 分

（III）根据折线图可以估计该校高二年级语文成绩平均分高，语文成绩相对更稳定.

其他结论合理即可得分. ……13 分

19.（本小题共 14 分）

解：（Ⅰ）由椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$得：

$a^2=4$，$b^2=3$，$c^2=a^2-b^2=4-3=1$

所以$c=1$， 椭圆 C的离心率为$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$.……4 分

（Ⅱ）因为$c=1$，所以点 F（1,0），

当直线 l 斜率不存在时，直线 l 的方程：$x=1$，A，B两点关于 x 轴对称，

点 P（4,0）在 x 轴上，所以直线 PA 与直线 PB关于 x 轴对称，

所以， 点 O到直线 PA 与直线的距离 PB相等，

所以，以坐标原点 O为圆心与 PA 相切的圆，必与直线 PB相切……6 分

当直线 l 斜率存在时，设直线 l 的方程：$y=k(x-1)$，$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$

由$\begin{cases}y=k(x-1)\\3x^2+4y^2=12\end{cases}$得：$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$

$x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$， $x_1\cdot x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$.……8 分

$k_{PA}=\frac{y_1}{x_1-4}=\frac{k(x_1-1)}{x_1-4}$， $k_{PB}=\frac{y_2}{x_2-4}=\frac{k(x_2-1)}{x_2-4}$.……10 分

$$k_{PA}+k_{PB}=\frac{k(x_1-1)}{x_1-4}+\frac{k(x_2-1)}{x_2-4}=\frac{k[2x_1\cdot x_2-5(x_1+x_2)+8]}{(x_1-4)(x_2-4)}$$

$$=\frac{k(\frac{8k^2-24}{3+4k^2}-\frac{40k^2}{3+4k^2}+8)}{(x_1-4)(x_2-4)}=0$$.……12 分

所以，$\angle APO=\angle BPO$，于是点 O到直线 PA 与直线的距离 PB相等，

故以坐标原点 O为圆心与 PA 相切的圆，必与直线 PB相切. ……14 分

（也可以用点 O到直线 PA 与直线的距离 PB的距离相等来证明）

20.（本小题共 13 分）

解：$f(x)$ 的定义域为$(0,+\infty)$. ……1 分

（Ⅰ）当$a=1$时，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，……2分

$f(1)=0$，$f'(1)=1$，……3分

所以，所求切线方程为$y=x-1$.……4分

（Ⅱ）因为$a>0,x>0$，所以.$f(x)<\frac{1}{\sqrt{x}}.\Leftrightarrow\frac{\ln x}{\sqrt{x}}<a$，……5分

令$g(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$，则$g'(x)=\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$，……6分

由$g'(x)=0$得，$x=\mathrm{e}^2$，

所以，$\forall\in(0,\mathrm{e}^2)$，$g'(x)>0$，$\forall x\in(\mathrm{e}^2,+\infty)$，$g'(x)<0$，……7分

所以$g(x)$的单调增区间是$(0,\mathrm{e}^2)$，单调减区间是$(\mathrm{e}^2,+\infty)$，……8分

所以$g(x)\le g(\mathrm{e}^2)=\frac{2}{\mathrm{e}}$，所以$a>\frac{2}{\mathrm{e}}$.……9分

（III）$f(x)<1\Leftrightarrow\ln x-ax<0$，……10分

令$h(x)=\ln x-ax$，$h'(x)=\frac{1-ax}{x}$，

所以，$\forall\in(0,\frac{1}{a})$，$h'(x)>0$，$\forall x\in(\frac{1}{a},+\infty)$，$h'(x)<0$，

所以$h'(x)$的单调增区间是$(0,\frac{1}{a})$，单调减区间是$(\frac{1}{a},+\infty)$，……11分

因为$h(1)=-a$，所以，

当$a\ge1$时，存在x_0=1，使得当$x\in(1,+\infty)$，恒有$h(x)<0$，即$f(x)<1$，……12分

当$0<a<1$时，由（Ⅱ）知，$\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{\sqrt{x}}$，即$\ln x<\sqrt{x}$，

所以$h(x)=\ln x-ax<\sqrt{x}-ax$，

由$\sqrt{x}-ax$=0得，$x=\sqrt{\frac{1}{a}}$，所以$h(\sqrt{\frac{1}{a}})<0$.

$\frac{1}{a}<\sqrt{\frac{1}{a}}$，存在$x_0=\sqrt{\frac{1}{a}}$，使得当$x\in(\sqrt{\frac{1}{a}},+\infty)$，恒有$h(x)<0$，即$f(x)<1$.

综合上所述，总存在x_0，使得当$x\in(x_0,+\infty)$，恒有$f(x)<1$.……13分