2017 北京东城高三二模

数　　学（理）

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知集合 $A=\{x\,|\,x^2-4<0\}$，则 $\complement_{\mathbf{R}}A=$

（A）$\{x\,|\,x\le -2 \text{ 或 } x\ge 2\}$　　（B）$\{x\,|\,x<-2 \text{ 或 } x>2\}$

（C）$\{x\,|\,-2<x<2\}$　　（D）$\{x\,|\,-2\le x\le 2\}$

（2）下列函数中为奇函数的是

（A）$y=x+\cos x$　　（B）$y=x+\sin x$

（C）$y=\sqrt{x}$　　（D）$y=\mathrm{e}^{-|x|}$

（3）若 x,y 满足 $\begin{cases}x-y+1\ge 0,\\ x+y\le 0,\\ y\ge 0,\end{cases}$ 则 $x+2y$ 的最大值为

（A）-1　　（B）0　　（C）$\dfrac{1}{2}$　　（D）2

（4）设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是非零向量，则“$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线”是“$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$”的

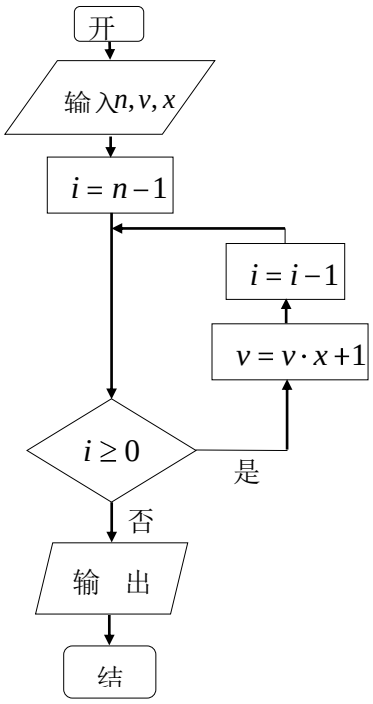
（A）充分而不必要条件　　（B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件　　（D）既不充分也不必要条件

（5）已知等比数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，S_n 是其前 n 项和. 若 $a_1+a_5=\dfrac{17}{2}$，$a_2a_4=4$，则 $S_6=$

（A）$\dfrac{27}{16}$　　（B）$\dfrac{27}{8}$　　（C）$\dfrac{63}{4}$　　（D）$\dfrac{63}{2}$

（6）我国南宋时期的数学家秦九韶（约 $1202-1261$）在他的著作《数书九章》中提出了多项式求值的秦九韶算法. 如图所示的框图给出了利用秦九韶算法求多项式的一个实例. 若输入的 $n=5$，$v=1$，$x=2$，则程序框图计算的是



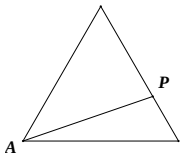
（A）$2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$

（B）$2^5+2^4+2^3+2^2+2+5$

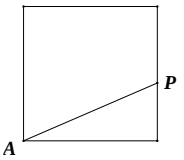
（C）$2^6+2^5+2^4+2^3+2^2+2+1$

（D）$2^4+2^3+2^2+2+1$

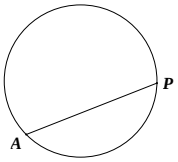
（7）动点 P 从点 A 出发，按逆时针方向沿周长为 l 的平面图形运动一周， A,P 两点间的距离 y 与动点 P 所走过的路程 x 的关系如图所示，那么动点 P 所走的图形可能是



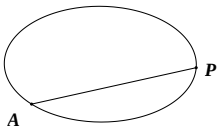
（A）



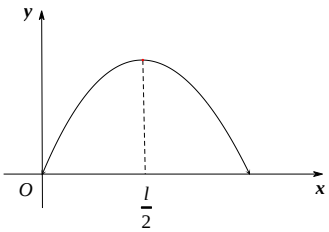
（B）



（C）



（D）



（8）据统计某超市两种蔬菜 A,B 连续 n 天价格分别为 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$ 和 $b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n$，

令 $M=\{m\mid a_m<b_m,m=1,2,\cdots,n\}$，若 M 中元素个数大于 $\frac{3}{4}n$，则称蔬菜 A 在这 n 天的价格低于蔬菜 B 的价格，记作：$A\prec B$，现有三种蔬菜 A,B,C，下列说法正确的是

（A）若 $A\prec B$， $B\prec C$，则 $A\prec C$

（B）若 $A\prec B$， $B\prec C$ 同时不成立，则 $A\prec C$ 不成立

（C） $A\prec B$， $B\prec A$ 可同时不成立

（D） $A\prec B$， $B\prec A$ 可同时成立

第二部分（非选择题 共 110 分）

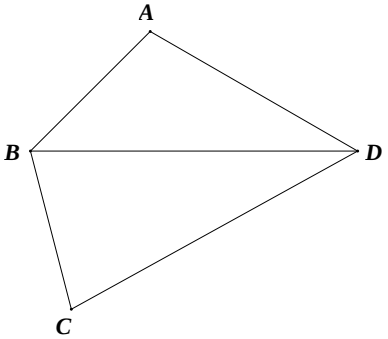
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

（9）复数 $\mathrm{i}(2-\mathrm{i})$ 在复平面内所对应的点的坐标为_____.

（10）在极坐标系中，直线 $\rho\cos\theta+\sqrt{3}\rho\sin\theta+1=0$ 与圆 $\rho=2a\cos\theta(a>0)$ 相切，则 $a=$_____.

（11）某校开设 A 类选修课 4 门， B 类选修课 2 门，每位同学需从两类选修课中共选 4 门．若要求至少选一门 B 类课程，则不同的选法共有____种．（用数字作答）

（12）如图，在四边形 $ABCD$ 中， $\angle ABD=45^\circ$， $\angle ADB=30^\circ$， $BC=1$，$DC=2$， $\cos\angle BCD=\frac{1}{4}$，则 $BD=$_____；三角形 ABD 的面积为_____.



（13）在直角坐标系 xOy 中，直线 l 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F，且与该抛物线相交于 A,B 两点，其中点 A 在 x 轴上方．若直线 l 的倾斜角为 60°，则 $|OA|=$_____.

（14）已知函数 $f(x)=\begin{cases}|x-1|,x\in(0,2],\\ \min\{|x-1|,|x-3|\},x\in(2,4],\\ \min\{|x-3|,|x-5|\},x\in(4,+\infty).\end{cases}$

① 若 $f(x)=a$ 有且只有一个根，则实数 a 的取值范围是_____.

② 若关于 x 的方程 $f(x+T)=f(x)$ 有且仅有 3 个不同的实根，则实数 T 的取值范围是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题共 13 分）

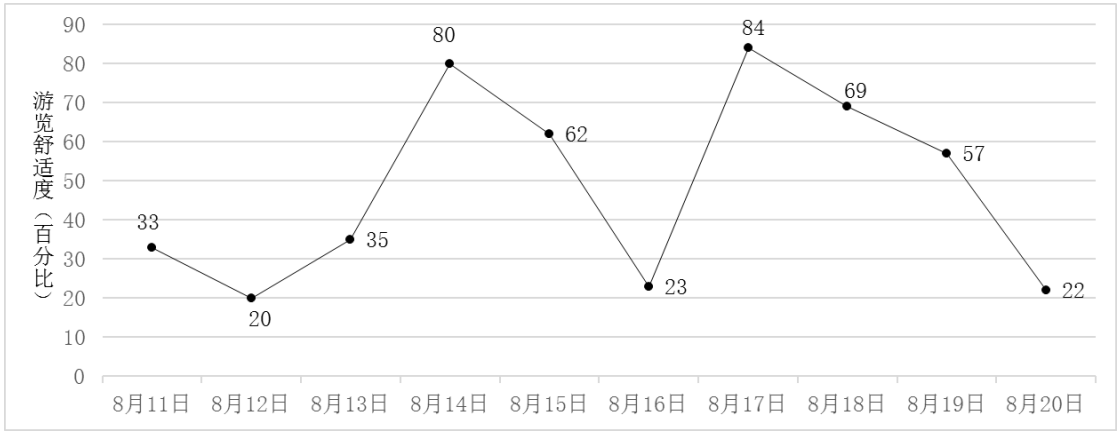
已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+a\cdot\cos 2x$（$a\in\mathbf{R}$）.

（Ⅰ）若 $f(\frac{\pi}{6})=2$，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}]$ 上单调递减，求 $f(x)$ 的最大值.

（16）（本小题共 13 分）

小明计划在 8 月 11 日至 8 月 20 日期间游览某主题公园．根据旅游局统计数据，该主题公园在此期间“游览舒适度”（即在园人数与景区主管部门核定的最大瞬时容量之比，40%以下为舒适，40%—60%为一般，60%以上为拥挤）情况如图所示．小明随机选择 8 月 11 日至 8 月 19 日中的某一天到达该主题公园，并游览 2 天.



（Ⅰ）求小明连续两天都遇上拥挤的概率；

（Ⅱ）设 X 是小明游览期间遇上舒适的天数，求 X 的分布列和数学期望；

（Ⅲ）由图判断从哪天开始连续三天游览舒适度的方差最大？（结论不要求证明）

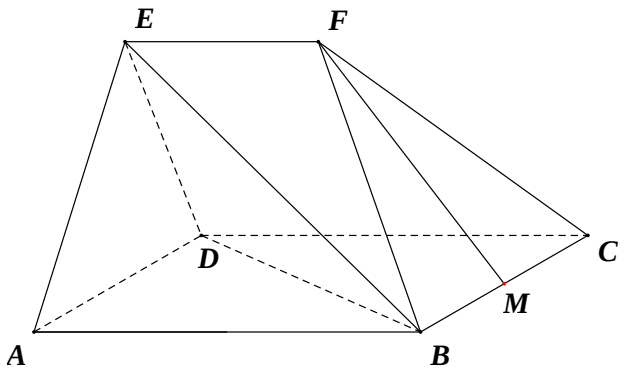
（17）（本小题共 14 分）

如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，平面 $ADE \perp$ 平面 $ABCD$，四边形 $ABCD$ 为菱形，且 $\angle DAB = 60^\circ$，$EA = ED = AB = 2EF$，$EF \parallel AB$，M 为 BC 中点.

（Ⅰ）求证：$FM \parallel$ 平面 BDE；

（Ⅱ）求直线 CF 与平面 BDE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在棱 CF 上是否存在点 G，使 $BG \perp DE$？ 若存在，求 $\dfrac{CG}{CF}$ 的值；若不存在，说明理由.



（18）（本小题共 13 分）

设函数 $f(x) = (x^2 + ax - a) \cdot \mathrm{e}^{-x} (a \in \mathbf{R})$.

（Ⅰ）当 $a = 0$ 时，求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程；

（Ⅱ）设 $g(x) = x^2 - x - 1$，若对任意的 $t \in [0,2]$，存在 $s \in [0,2]$ 使得 $f(s) \geq g(t)$ 成立，求 a 的取值范围.

（19）（本小题共 13 分）

已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的短轴长为 $2\sqrt{3}$，右焦点为 $F(1,0)$，点 M 是椭圆 C 上异于左、右顶点 A,B 的一点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）若直线 AM 与直线 $x=2$ 交于点 N，线段 BN 的中点为 E．证明：点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上.

（20）（本小题共 13 分）

对于 n 维向量 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，若对任意 $i\in\{1,2,\cdots,n\}$ 均有 $a_i=0$ 或 $a_i=1$，则称 A 为 n 维 T 向量. 对于两个 n 维 T 向量 A,B，定义 $d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$.

（Ⅰ）若 $A=(1,0,1,0,1)$，$B=(0,1,1,1,0)$，求 $d(A,B)$ 的值.

（Ⅱ）现有一个 5 维 T 向量序列：$A_1,A_2,A_3,\cdots$，若 $A_1=(1,1,1,1,1)$ 且满足：$d(A_i,A_{i+1})=2$，$i\in\mathbf{N}^*$. 求证：该序列中不存在 5 维 T 向量 $(0,0,0,0,0)$.

（Ⅲ）现有一个 12 维 T 向量序列：$A_1,A_2,A_3,\cdots$，若 $A_1=(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{12个})$ 且满足：$d(A_i,A_{i+1})=m$，$m\in\mathbf{N}^*$，$i=1,2,3,\cdots$，若存在正整数 j 使得 $A_j=(\underbrace{0,0,\cdots,0}_{12个})$，$A_j$ 为 12 维 T 向量序列中的项，求出所有的 m.

参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

（1）A　　（2）B　　（3）C　　（4）B

（5）D　　（6）A　　（7）C　　（8）C

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

（9）$(1,2)$　　（10）1　　（11）14

（12）2　$\sqrt{3}-1$　　（13）$\sqrt{21}$　　（14）$(1,+\infty)$　$(-4,-2)\cup(2,4)$

三、解答题（共 6 小题，共 80 分）

（15）（共 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $f(\frac{\pi}{6})=\sqrt{3}\sin 2\cdot\frac{\pi}{6}+a\cdot\cos 2\cdot\frac{\pi}{6}=2$，　　……3 分

所以 $\frac{3}{2}+a\cdot\frac{1}{2}=2$.　　……5 分

所以 $a=1$.　　……6 分

（Ⅱ）由题意 $f(x)=\sqrt{3+a^2}(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3+a^2}}\sin 2x+\frac{a}{\sqrt{3+a^2}}\cos 2x)$

$=\sqrt{3+a^2}\sin(2x+\varphi)$，其中 $\tan\varphi=\frac{a}{\sqrt{3}}$.　……8 分

所以 $T=\pi$，且 $\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}$，　　……9 分

所以当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$y_{\max}=f(\frac{\pi}{12})=\sqrt{3+a^2}\sin(\frac{\pi}{6}+\varphi)$.

所以 $\varphi=\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$.　　……10 分

所以 $\tan\varphi=\frac{a}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$，$a=3$.　　……11 分

所以 $f(x)=2\sqrt{3}\sin(2x+\frac{\pi}{3})$.　　……12 分

所以 $f(x)$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$.　　……13 分

（16）（共 13 分）

解：设 A_i 表示事件“小明 8 月 11 日起第 i 日连续两天游览主题公园”（$i=1,2,\cdots,9$）.

根据题意，$P(A_i)=\frac{1}{9}$，且 $A_i\cap A_j=\varnothing(i\neq j)$.　　……1 分

（Ⅰ）设 B 为事件“小明连续两天都遇上拥挤”，

则 $B=A_4\cup A_7$.　　……2 分

所以 $P(B)=P(A_4\cup A_7)=P(A_4)+P(A_7)=\frac{2}{9}$. ……5 分

（Ⅱ）由题意，可知 X 的所有可能取值为 $0,1,2$， ……6 分

$P(X=0)=P(A_4\cup A_7\cup A_8)=P(A_4)+P(A_7)+P(A_8)=\frac{1}{3}$， ……7 分

$P(X=1)=P(A_3\cup A_5\cup A_6\cup A_9)=P(A_3)+P(A_5)+P(A_6)+P(A_9)=\frac{4}{9}$，

……8 分

$P(X=2)=P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)=\frac{2}{9}$. ……9 分

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

……10 分

故 X 的期望 $EX=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}=\frac{8}{9}$. ……11 分

（Ⅲ）从 8 月 16 日开始连续三天游览舒适度的方差最大. ……13 分

（17）（共 14 分）

解：（Ⅰ）取 CD 中点 N，连结 MN,FN.

因为 N,M 分别为 CD,BC 中点，

所以 $MN\ //\ BD$.

又 $BD\subset$ 平面 BDE

且 $MN\not\subset$ 平面 BDE，

所以 $MN\ //$ 平面 BDE，

因为 $EF\ //\ AB$， $AB=2EF$，

所以 $EF\ //\ CD$， $EF=DN$.

所以四边形 $EFND$ 为平行四边形.

所以 $FN\ //\ ED$.

又 $ED\subset$ 平面 BDE 且 $FN\not\subset$ 平面 BDE，

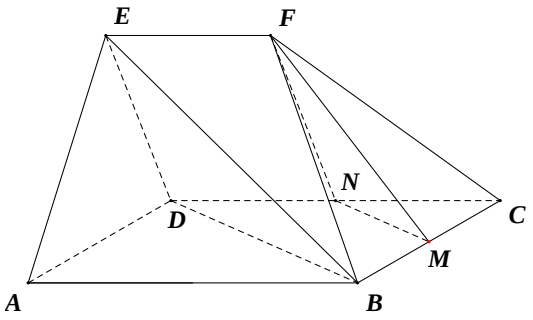
所以 $FN\ //$ 平面 BDE， ……2 分

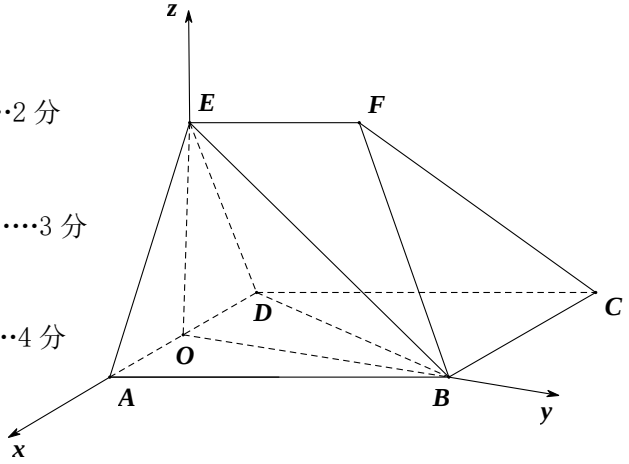
又 $FN\cap MN=N$，

所以平面 $MFN\ //$ 平面 BDE. ……3 分

又 $FM\subset$ 平面 MFN，

所以 $FM\ //$ 平面 BDE. ……4 分





（Ⅱ）取 AD 中点 O，连结 EO， BO.

因为 $EA=ED$，所以 $EO\perp AD$.

因为平面 $ADE\perp$ 平面 $ABCD$，

所以 $EO\perp$ 平面 $ABCD$， $EO\perp BO$.

因为 $AD=AB$， $\angle DAB=60^\circ$，

所以△ ADB 为等边三角形.

因为 O 为 AD 中点，

所以 $AD\perp BO$.

因为 EO,BO,AO 两两垂直，设 $AB=4$，以 O 为原点， OA,OB,OE 为 x,y,z 轴，如图建立空间直角坐标系 $O-xyz$. ……6 分

由题意得， $A(2,0,0)$， $B(0,2\sqrt{3},0)$， $C(-4,2\sqrt{3},0)$， $D(-2,0,0)$，

$E(0,0,2\sqrt{3})$， $F(-1,\sqrt{3},2\sqrt{3})$. ……7 分

$\overrightarrow{CF}=(3,-\sqrt{3},2\sqrt{3})$， $\overrightarrow{DE}=(2,0,2\sqrt{3})$， $\overrightarrow{BE}=(0,-2\sqrt{3},2\sqrt{3})$.

设平面 BDE 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-z=0,\\ x+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，则 $y=1$， $x=-\sqrt{3}$.

所以 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,1)$. ……9 分

设直线 CF 与平面 BDE 成角为 α，

$\sin\alpha=|\cos<\overrightarrow{CF},\boldsymbol{n}>|=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$

所以直线 CF 与平面 ADE 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{10}}{10}$. ……10 分

（Ⅲ）设 G 是 CF 上一点，且 $\overrightarrow{CG}=\lambda\overrightarrow{CF}$， $\lambda\in[0,1]$. ……11 分

因此点 $G(3\lambda-4,-\sqrt{3}\lambda+2\sqrt{3},2\sqrt{3}\lambda)$. ……12 分

$\overrightarrow{BG}=(3\lambda-4,-\sqrt{3}\lambda,2\sqrt{3}\lambda)$.

由 $\overrightarrow{BG}\cdot\overrightarrow{DE}=0$，解得 $\lambda=\dfrac{4}{9}$.

所以在棱 CF 上存在点 G 使得 $BG\perp DE$，此时 $\dfrac{CG}{CF}=\dfrac{4}{9}$. ……14 分

（18）（共 13 分）

解：（Ⅰ）当 $a=0$ 时，因为 $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$，

所以 $f'(x)=(-x^2+2x)\cdot e^{-x}$， ……1 分

$f'(-1)=-3e$. ……2 分

又因为 $f(-1)=\mathrm{e}$，　　……3 分

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1,f(-1))$ 处的切线方程为

$y-\mathrm{e}=-3\mathrm{e}(x+1)$，即 $3\mathrm{e}x+y+2\mathrm{e}=0$．　　……4 分

（Ⅱ）“对任意的 $t\in[0,2]$，存在 $s\in[0,2]$ 使得 $f(s)\geq g(t)$ 成立”等价于“在区间 $[0,2]$ 上，$f(x)$ 的最大值大于或等于 $g(x)$ 的最大值”．　　……5 分

因为 $g(x)=x^2-x-1=(x-\frac{1}{2})^2-\frac{5}{4}$，

所以 $g(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 $g(2)=1$．

$f'(x)=(2x+a)\cdot\mathrm{e}^{-x}-(x^2+ax-a)\cdot\mathrm{e}^{-x}$

$=-\mathrm{e}^{-x}[x^2+(a-2)x-2a]$

$=-\mathrm{e}^{-x}(x-2)(x+a)$

令 $f'(x)=0$，得 $x=2$ 或 $x=-a$．　　……7 分

① 当 $-a\leq 0$，即 $a\geq 0$ 时，

$f'(x)\geq 0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上为单调递增函数，

$f(x)$ 的最大值为 $f(2)=(4+a)\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

由 $(4+a)\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^2}\geq 1$，得 $a\geq \mathrm{e}^2-4$．　　……9 分

② 当 $0<-a<2$，即 $-2<a<0$ 时，

当 $x\in(0,-a)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为单调递减函数，

当 $x\in(-a,2)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为单调递增函数．

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(0)=-a$ 或 $f(2)=(4+a)\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^2}$，

由 $-a\geq 1$，得 $a\leq -1$；由 $(4+a)\cdot\frac{1}{\mathrm{e}^2}\geq 1$，得 $a\geq \mathrm{e}^2-4$．

又因为 $-2<a<0$，所以 $-2<a\leq -1$．　　……11 分

③ 当 $-a\geq 2$，即 $a\leq -2$ 时，

$f'(x)\leq 0$ 在 $[0,2]$ 上恒成立，$f(x)$ 在 $[0,2]$ 上为单调递减函数，

$f(x)$ 的最大值为 $f(0)=-a$，

由 $-a\geq 1$，得 $a\leq -1$，

又因为 $a\leq -2$，所以 $a\leq -2$．

综上所述，实数 a 的值范围是 $a\leq -1$ 或 $a\geq \mathrm{e}^2-4$．　　……13 分

（19）（共 14 分）

解：（Ⅰ）由题意得 $\begin{cases} b=\sqrt{3}, \\ c=1, \\ a^2=b^2+c^2. \end{cases}$ 解得 $a=2$. ……4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. ……5 分

（Ⅱ）“点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上”等价于“ EF 平分 $\angle MFB$ ”. ……6 分

设直线 AM 的方程为 $y=k(x+2)(k\neq 0)$，则 $N(2,4k),E(2,2k)$. ……7 分

设点 $M(x_0,y_0)$，由 $\begin{cases} y=k(x+2), \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得 $(3+4k^2)x^2+16k^2x+16k^2-12=0$，

得 $\begin{cases} x_0=\frac{-8k^2+6}{3+4k^2}, \\ y_0=\frac{12k}{3+4k^2}. \end{cases}$ ……9 分

① 当 $MF\perp x$ 轴时，$x_0=1$，此时 $k=\pm\frac{1}{2}$.

所以 $M(1,\pm\frac{3}{2}),N(2,\pm 2),E(2,\pm 1)$.

此时，点 E 在 $\angle BFM$ 的角平分线所在的直线 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$，

即 EF 平分 $\angle MFB$. ……10 分

② 当 $k\neq\pm\frac{1}{2}$ 时，直线 MF 的斜率为 $k_{MF}=\frac{y_0}{x_0-1}=\frac{4k}{1-4k^2}$，

所以直线 MF 的方程为 $4kx+(4k^2-1)y-4k=0$. ……11 分

所以点 E 到直线 MF 的距离

$$d=\frac{|8k+2k(4k^2-1)-4k|}{\sqrt{16k^2+(4k^2-1)^2}}=\frac{|4k+2k(4k^2-1)|}{\sqrt{(4k^2+1)^2}}$$

$$=\frac{|2k(4k^2+1)|}{|4k^2+1|}=|2k|=|BE|.$$

即点 B 关于直线 EF 的对称点在直线 MF 上. ……14 分

（20）（共 13 分）

解：（Ⅰ）由于 $A=(1,0,1,0,1)$，$B=(0,1,1,1,0)$，由定义 $d(A,B)=\sum_{i=1}^{n}|a_i-b_i|$，

可得 $d(A,B)=4$. ……4 分

（Ⅱ）反证法：若结论不成立，即存在一个含 5 维 T 向量序列 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_m$，

使得 $A_1=(1,1,1,1,1)$，$A_m=(0,0,0,0,0)$.

因为向量 $A_1=(1,1,1,1,1)$ 的每一个分量变为 0，都需要奇数次变化，

不妨设 A_1 的第 $i(i=1,2,3,4,5)$ 个分量1变化了 $2n_i-1$ 次之后变成 0，

所以将 A_1 中所有分量1 变为 0 共需要

$(2n_1-1)+(2n_2-1)+(2n_3-1)+(2n_4-1)+(2n_5-1)$

$=2(n_1+n_2+n_3+n_4+n_5-2)-1$ 次，此数为奇数.

又因为 $d(A_i,A_{i+1})=2,i\in\mathbf{N}^*$，说明 A_i 中的分量有 2 个数值发生改变，

进而变化到 A_{i+1}，所以共需要改变数值 $2(m-1)$ 次，此数为偶数，所以矛盾.

所以该序列中不存在 5 维 T 向量 $(0,0,0,0,0)$. ……9 分

（Ⅲ）此时 $m=1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$. ……13 分

易见当 m 为 12 的因子 $1,2,3,4,6,12$ 时，给（1 分）.

答出 $m=5,8,10$ 给(1 分).

答出 $m=7,9,11$ 中任一个给(1 分)，都对给(2 分)