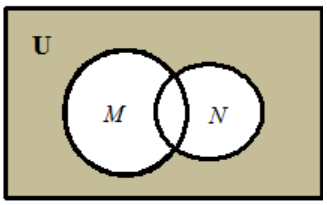
2017 北京东城高三二模

数　　学（文）

第一部分（选择题　共 40 分）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1．已知全集 $\mathbf{U}$ 是实数集 $\mathbf{R}$．右边的韦恩图表示集合 $M=\{x\mid x>2\}$ 与 $N=\{x\mid 1<x<3\}$ 关系，那么阴影部分所表示的集合可能为



A．$\{x|x<2\}$　　B．$\{x|1<x<2\}$　　C．$\{x\mid x>3\}$　　D．$\{x\mid x\le 1\}$

2．已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,2)$，$\boldsymbol{b}=(x,4)$，且 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，那么 x 的值为

A．-2　　B．-4　　C．-8　　D．-16

3．下列函数既是奇函数，又在区间$[-1,1]$上单调递减的是

A．$f(x)=\sin x$　　B．$f(x)=|x+1|$

C．$f(x)=-x$　　D．$f(x)=\cos x$

4．在平面直角坐标系中，不等式组 $\begin{cases}x\ge 0,\\ x+y\le 2,\\ x\le y\end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

5．已知 $x,y\in\mathbf{R}$，那么“$x>y$”的充分必要条件是

A．$2^x>2^y$　　B．$\lg x>\lg y$　　C．$\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$　　D．$x^2>y^2$

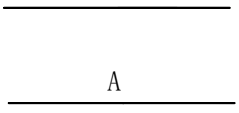
6．已知直线 $x+y=m(m>0)$ 与圆 $x^2+y^2=1$ 相交于 P，Q 两点，且 $\angle POQ=120°$（其中 O 为原点），那么 m 的值是

A．$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B．$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

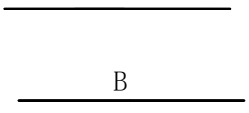
7．日晷，是中国古代利用日影测得时刻的一种计时工具，又称“日规”．其原理就是利用太阳的投影方向来测定并划分时刻．利用日晷计时的方法是人类在天文计时领域的重大发明，这项发明被人类沿用达几千年之久．下图是故宫中的一个日晷，则根据图片判断此日晷的侧(左)视图可能为



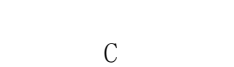
A



B



C



D



8．已知甲、乙两个容器，甲容器容量为 x，装满纯酒精，乙容器容量为 z，其中装有体积为 y 的水（$x,y<z$，单

位：L)．现将甲容器中的液体倒入乙容器中，直至甲容器中液体倒完或乙容器盛满，搅拌使乙容器中两种液体充分混合，再将乙容器中的液体倒入甲容器中直至倒满，搅拌使甲容器中液体充分混合，如此称为一次操作，假设操作过程中溶液体积变化忽略不计．设经过$n\ (n\in\mathbf{N}^*)$次操作之后，乙容器中含有纯酒精a_n（单位：L)，下列关于数,列$\{a_n\}$的说法正确的是

A．当$x=y=a$时，数列$\{a_n\}$有最大值$\dfrac{a}{2}$

B．设$b_n=a_{n+1}-a_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{b_n\}$为递减数列

C．对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，始终有$a_n\le\dfrac{xy}{z}$

D．对任意的$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_n\le\dfrac{xy}{x+y}$

第二部分（非选择题 共 110 分）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分。

9．已知ΔABC三内角A，B，C对应的边长分别为a，b，c，且$B=\dfrac{2\pi}{3}$，又边长$b=3c$，那么$\sin C=$_____.

10．已知$\dfrac{1}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{1}{2}-n\mathrm{i}$,其中$n$是实数，i 是虚数单位，那么$n=$_____.

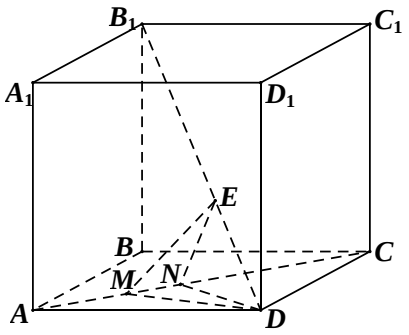
11．右面茎叶图记录了甲，乙两班各六名同学一周的课外阅读时间（单位：小时），已知甲班数据的平均数为 13，乙班数据的中位数为 17，那么x的位置应填_____；y的位置应填_____.

甲				乙		
	8	9	0	7	6	
3	x	5	1	9	y	6
		0	2	1		

12．已知函数$f(x)=\ln x+2x-6$的零点在区间$(\dfrac{k}{2},\dfrac{k+1}{2})\ \ (k\in Z)$内，那么$k=$_____.

13．已知双曲线G以原点O为中心，过$(\sqrt{5},4)$点，且以抛物线C：$y^2=4x$的焦点为右顶点，那么双曲线G的方程为_____.

14．如图，在棱长为 2 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为对角线B_1D上的一点，M,N为对角线AC上的两个动点，且线段MN的长度为 1.



（1）当N为对角线AC的中点且$DE=\sqrt{2}$时，则三棱锥$E-DMN$的体积是_____；

（2）当三棱锥$E-DMN$的体积为$\dfrac{1}{3}$时，则$DE=$_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

15.（本小题 13 分）

在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=-2$，$a_{12}=20$.

（Ⅰ）求通项a_n；

（Ⅱ）若$b_n=\dfrac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}$，求数列$\{3^{b_n}\}$的前$n$项和.

16.（本小题 13 分）

函数$f(x)=A\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{6})(A>0,\omega>0)$的最大值为$2$，它的最小正周期为$2\pi$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的解析式；

（Ⅱ）若$g(x)=\cos x\cdot f(x)$，求$g(x)$在区间$[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}]$上的最大值和最小值.

17.（本小题 13 分）

某单位附近只有甲，乙两个临时停车场，它们各有 50 个车位，为了方便市民停车，某互联网停车公司对这两个停车场在工作日某些固定时刻的剩余停车位进行记录，如下表：

时间	8 点	10 点	12 点	14 点	16 点	18 点
停车场甲	10	3	12	6	12	17
停车场乙	13	4	3	2	6	19

如果表中某一时刻停车场剩余停车位数低于总车位数的 10%，那么当车主驱车抵达单位附近时，该公司将会向车主发出停车场饱和警报.

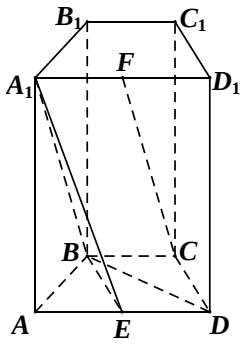
（Ⅰ）假设某车主在以上六个时刻抵达单位附近的可能性相同，求他收到甲停车场饱和警报的概率；

（Ⅱ）从这六个时刻中任选一个时刻，求甲停车场比乙停车场剩余车位数少的概率；

（Ⅲ）当停车场乙发出饱和警报时，求停车场甲也发出饱和警报的概率.

18.（本小题 14 分）

如图，在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，侧面 ADD_1A_1 和侧面 CDD_1C_1 都是矩形，$BC\parallel AD$，ΔABD 是边长为 2 的正三角形，E，F 分别为 AD，A_1D_1 的中点.



（Ⅰ）求证：$DD_1\perp$ 平面 $ABCD$；

（Ⅱ）求证：平面 $A_1BE\perp$ 平面 ADD_1A_1；

（Ⅲ）若 $CF\parallel$ 平面 A_1BE，求棱 BC 的长度.

19.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=(x-a)\cdot e^{x}$， $a\in\mathbf{R}$.

（Ⅰ）当 $a=1$ 时，试求 $f(x)$ 的单调增区间；

（Ⅱ）试求 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上的最大值；

（Ⅲ）当 $a=1$ 时，求证：对于 $\forall x\in[-5,+\infty)$， $f(x)+x+5\geq-\frac{6}{e^{5}}$ 恒成立.

20.（本小题 14 分）

已知椭圆 $E:mx^{2}+y^{2}=1(m>0)$.

（Ⅰ）若椭圆 E 的右焦点坐标为 $(\sqrt{3},0)$，求 m 的值；

（Ⅱ）由椭圆 E 上不同三点构成的三角形称为椭圆的内接三角形. 若以 $B(0,1)$ 为直角顶点的椭圆 E 的内接等腰直角三角形恰有三个，求 m 的取值范围.

参考答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分）

1．D　　2．C　　3．C　　4．A　　5．A　　6．B　　7．D　　8．D

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　10. $\frac{1}{2}$　　11. 3，8

12. 5　　13. $x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　14. $\frac{\sqrt{3}}{9}$，$\sqrt{6}$

注：两个空的填空题第一个空填对得 3 分，第二个空填对得 2 分.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分）

15.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）因为 $a_n=-2+(n-1)d$，

所以 $a_{12}=-2+11d=20$.

于是 $d=2$，

所以 $a_n=2n-4$.　　……6 分

（Ⅱ）因为 $a_n=2n-4$，

所以 $a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{n(2n-6)}{2}=n(n-3)$.

于是 $b_n=\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n}=n-3$，

令 $c_n=3^{b_n}$，则 $c_n=3^{n-3}$.

显然数列 $\{c_n\}$ 是等比数列，且 $c_1=3^{-2}$，公比 $q=3$，

所以数列 $\{3^{b_n}\}$ 的前 n 项和 $S_n=\frac{c_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{3^n-1}{18}$.　　……13 分

16.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由已知 $f(x)$ 最小正周期为 2π，

所以 $\frac{2\pi}{\omega}=2\pi$，解得 $\omega=1$.

因为 $f(x)$ 的最大值 2，所以 $A=2$.

所以 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})$.　　----------5 分

（Ⅱ）因为 $f(x)=2\sin(x+\frac{\pi}{6})=2\sin x\cos\frac{\pi}{6}+2\cos x\sin\frac{\pi}{6}$

$=\sqrt{3}\sin x+\cos x$

所以 $g(x)=\cos x\cdot f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1+\cos 2x}{2}$

$=\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$

因为 $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{4}$，所以 $-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{2\pi}{3}$.

于是，当$2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$,即$x=\frac{\pi}{6}$时，$g(x)$取得最大值$\frac{3}{2}$；

当$2x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$即$x=-\frac{\pi}{6}$时，$g(x)$取得最小值$0$．----------13 分

17.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）事件“该车主收到停车场甲饱和警报”只有 10 点这一种情况，

该车主抵达单位共有六种情况，

所以该车主收到停车场甲饱和警报的概率为$P=\frac{1}{6}$. ……4 分

（Ⅱ）事件“甲停车场比乙停车场剩余车位数少”有 8 点、10 点、18 点三种情况，

一共有六个时刻，

所以甲停车场比乙停车场剩余车位数少的概率为$P=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$. ……9 分

（Ⅲ）事件“停车场乙发出饱和警报”有 10 点、12 点、14 点三种情况，

事件“停车场甲也发出饱和警报”只有 10 点一种情况，

所以当停车场乙发出饱和警报时，停车场甲也发出饱和警报的概率为$P=\frac{1}{3}$. ……13 分

18.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）因为侧面ADD_1A_1和侧面CDD_1C_1都是矩形，

所以$DD_1\perp AD$，且$DD_1\perp CD$.

因为$AD\cap CD=D$，

所以$DD_1\perp$平面$ABCD$. ……4 分

（Ⅱ）因为ΔABD是正三角形，且E为AD中点，

所以$BE\perp AD$.

因为$DD_1\perp$平面$ABCD$，

而$BE\subset$平面$ABCD$，

所以$BE\perp DD_1$.

因为$AD\cap DD_1=D$，

所以$BE\perp$平面ADD_1A_1.

因为$BE\subset$平面A_1BE，

所以平面$A_1BE\perp$平面ADD_1A_1. ……10 分

（Ⅲ）因为$BC//AD$，

而F为A_1D_1的中点，

所以$BC//A_1F$.

所以B，C，F，A_1四点共面.

因为$CF//$平面A_1BE，

而平面$BCFA_1\cap$平面$A_1BE=A_1B$，

所以$CF//A_1B$.

所以四边形 $BCFA_1$ 是平行四边形.

所以 $BC=FA_1=\frac{1}{2}AD=1$. ……14 分

19.（本小题 13 分）

解：（Ⅰ）由 $f(x)=(x-a)\cdot e^x$ 得 $f'(x)=(x-a+1)\cdot e^x$.

当 $a=1$ 时， $f'(x)=x\cdot e^x$，令 $f'(x)>0$，得 $x>0$，

所以 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$. ……4 分

（Ⅱ）令 $f'(x)=0$ 得 $x=a-1$.

所以当 $a-1\le 1$ 时， $x\in[1,2]$ 时 $f'(x)\ge 0$ 恒成立， $f(x)$ 单调递增；

当 $a-1\ge 2$ 时， $x\in[1,2]$ 时 $f'(x)\le 0$ 恒成立， $f(x)$ 单调递减；

当 $1<a-1<2$ 时， $x\in[1,a-1)$ 时 $f'(x)\le 0$， $f(x)$ 单调递减；

$x\in(a-1,2)$ 时 $f'(x)>0$， $f(x)$ 单调递增.

综上，无论 a 为何值，当 $x\in[1,2]$ 时， $f(x)$ 最大值都为 $f(1)$ 或 $f(2)$.

$f(1)=(1-a)e$， $f(2)=(2-a)e^2$，

$f(1)-f(2)=(1-a)e-(2-a)e^2=(e^2-e)a-(2e^2-e)$.

所以当 $a\ge\frac{2e^2-e}{e^2-e}=\frac{2e-1}{e-1}$ 时， $f(1)-f(2)\ge 0$， $f(x)_{\max}=f(1)=(1-a)e$.

当 $a<\frac{2e^2-e}{e^2-e}=\frac{2e-1}{e-1}$ 时， $f(1)-f(2)<0$， $f(x)_{\max}=f(2)=(2-a)e^2$. ……10 分

（Ⅲ）令 $h(x)=f(x)+x$，所以 $h'(x)=xe^x+1$.

所以 $h''(x)=(x+1)e^x$.

令 $h''(x)=(x+1)e^x=0$，解得 $x=-1$，

所以当 $x\in[-5,-1)$， $h''(x)<0$， $h'(x)$ 单调递减；

当 $x\in[-1,+\infty)$， $h''(x)>0$， $h'(x)$ 单调递增.

所以当 $x=-1$ 时， $h'(x)_{\min}=h'(-1)=1-\frac{1}{e}>0$.

所以函数 $h(x)$ 在 $[-5,+\infty)$ 单调递增.

所以 $h(x)\ge h(-5)=-\frac{6}{e^5}-5$.

所以 $\forall x\in[-5,+\infty)$， $f(x)+x+5\ge-\frac{6}{e^5}$ 恒成立. ……13 分

20.（本小题 14 分）

解：（Ⅰ）椭圆 E 的方程可以写成 $\frac{x^2}{\frac{1}{m}}+y^2=1$，焦点 $(\sqrt{3},0)$ 在 x 轴上，所以 $a^2=\frac{1}{m}$， $b^2=1$

$c^2=a^2-b^2=\frac{1}{m}-1=\sqrt{3}^2=3$，求得 $m=\frac{1}{4}$. ……4 分

（Ⅱ）设椭圆 E 内接等腰直角三角形的两直角边分别为 BA， BC，设 $A(x_1,y_1)$， $C(x_2,y_2)$

显然 BA 与 BC 不与坐标轴平行，且 $k_{BA}\cdot k_{BC}=-1<0$

$\therefore$ 可设直线 BA 的方程为 $y=kx+1(k>0)$，则直线 BC 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x+1$，

由 $\begin{cases}mx^2+y^2=1\\ y=kx+1\end{cases}$ 消去 y 得到 $(m+k^2)x^2+2kx=0$，所以 $x_1=\frac{-2k}{m+k^2}$

求得 $|BA|=\sqrt{k^2+1}\,|x_1-0|=\sqrt{k^2+1}\,\frac{|-2k|}{m+k^2}=\frac{2k}{m+k^2}\sqrt{k^2+1}$

同理可求 $|BC|=\sqrt{(-\frac{1}{k})^2+1}\,|x_2-0|=\sqrt{(-\frac{1}{k})^2+1}\,\frac{|-2(-\frac{1}{k})|}{m+(-\frac{1}{k})^2}=\frac{2}{mk^2+1}\sqrt{k^2+1}$

因为 ΔABC 为以 $B(0,1)$ 为直角顶点的等腰直角三角形，所以 $|BA|=|BC|$，

所以 $\frac{2k}{m+k^2}\sqrt{k^2+1}=\frac{2}{mk^2+1}\sqrt{k^2+1}$，

整理得 $mk^3-k^2+k-m=0\Rightarrow(mk^3-m)-(k^2-k)=0\Rightarrow m(k^3-1)-(k^2-k)=0$

$m(k-1)(k^2+k+1)-k(k-1)=0\Rightarrow(k-1)[mk^2+(m-1)k+m]=0$

所以 $k=1$ 或 $mk^2+(m-1)k+m=0$，设 $f(k)=mk^2+(m-1)k+m$

因为以 $B(0,1)$ 为直角顶点的椭圆内接等腰直角三角形恰有三个，

所以关于 k 的方程 $mk^2+(m-1)k+m=0$ 有两个不同的正实根 x_1，x_2，且都不为1

$$\therefore\begin{cases}f(1)\neq0\Rightarrow m+(m-1)+m\neq0\Rightarrow m\neq\frac{1}{3},\\ x_1+x_2>0\Rightarrow-\frac{m-1}{m}>0\Rightarrow0<m<1,\\ x_1\bullet x_2>0\Rightarrow1>0,\ \text{恒成立}\\ \Delta>0\Rightarrow\Delta=(m-1)^2-4m^2>0\Rightarrow-1<m<\frac{1}{3}\end{cases}$$

所以实数 m 的取值范围是 $(0,\frac{1}{3})$.　　……14 分