2016 北京海淀高三二模

数　　学（文）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1．（5 分）已知全集 U={x|x＞0}，M={x|x＞1}，则∁$_U$M=（　　）

A．{x|x≤1}　　B．{x|0＜x≤1}　C．{x|x≥0}　　D．{x|x≤0 或 x＞1}

2．（5 分）数列{a_n}的首项 a_1=2，且（n+1）a_n=na_{n+1}，则 a_3 的值为（　　）

A．5　　B．6　　C．7　　D．8

3．（5 分）已知命题 p 和命题 q，若 p∧q 为真命题，则下面结论正确的是（　　）

A．¬p 是真命题　　B．¬q 是真命题

C．p∨q 为真命题　D．（¬p）∨（¬q）为真命题

4．（5 分）已知向量 $\vec{a}$=（1，2），$\vec{b}$=（2，t），且 $\vec{a}\cdot\vec{b}$=0，则|$\vec{b}$|=（　　）

A．$\sqrt{5}$　B．$2\sqrt{2}$　C．$2\sqrt{5}$　D．5

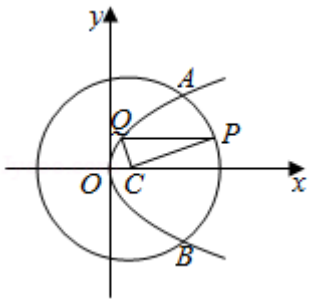
5．（5 分）函数 f（x）=2x－2^x 的零点个数是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

6．（5 分）在△ABC 中，cosA=$\frac{3}{5}$，cosB=$\frac{4}{5}$，则 sin（A+B）=（　　）

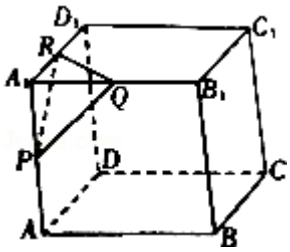
A．$\frac{7}{25}$　B．$\frac{9}{25}$　C．$\frac{16}{25}$　D．1

7．（5 分）如图，抛物线 W：y^2=4x 与圆 C：（x－1）^{2}+y^2=25 交于 A，B 两点，点 P 为劣弧 $\overset{\frown}{AB}$上不同于 A，B 的一个动点，与 x 轴平行的直线 PQ 交抛物线 W 于点 Q，则△PQC 的周长的取值范围是（　　）



A．（10，14）　B．（12，14）　C．（10，12）　D．（9，11）

8．（5 分）正方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，点 P，Q，R 分别是棱 A_1A，A_1B_1，A_1D_1 的中点，以△PQR 为底面作正三棱柱，若此三棱柱另一底面的三个顶点也都在该正方体的表面上，则这个正三棱柱的高为（　　）

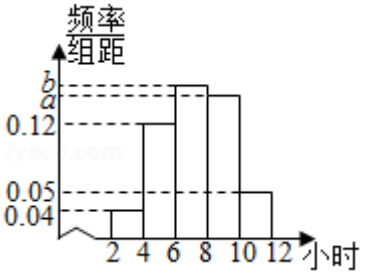


A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$ B．$\sqrt{2}$ C．$\frac{\sqrt{3}}{3}$ D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9．（5 分）已知$\frac{2+i}{1+ai}$=i，其中 i 为虚数单位，a∈R，则 a=_____．

10．（5 分）某校为了解全校高中学生五一小长假参加实践活动的情况，抽查了 100 名学生，统计他们假期参加实践活动的实践，绘成的频率分布直方图如图所示，这 100 名学生中参加实践活动时间在 6﹣10 小时内的人数为_____．



11．（5 分）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$的一条渐近线与直线 y=﹣x+1 垂直，则该双曲线的焦距为_____．

12．（5 分）若点 P（x，y）在不等式组$\begin{cases}x+y-2\leqslant 0\\ x-y+2\geqslant 0\\ y\geqslant 1\end{cases}$所表示的平面区域内，则原点 O 与点 P 距离的取值范围是_____．

13．（5 分）在一次调查中，甲、乙、丙、丁四名同学的阅读量有如下关系：甲、丙阅读量之和与乙、丁阅读量之和相同，甲、乙阅读量之和大于丙、丁阅读量之和，丁的阅读量大于乙、丙阅读量之和．那么这四名同学按阅读量从大到小的排序依次为_____．

14．（5 分）已知点 A（$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），B（$\frac{\pi}{4}$，1），C（$\frac{\pi}{2}$，0），若这三个点中有且仅有两个点在函数 f（x）=sinωx 的图象上，则正数 ω 的最小值为_____．

三、解答题（共 6 小题，满分 80 分）

15．（13 分）已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=4n-2$，各项都是正数的等比数列$\{b_n\}$满足 $b_1=a_1$，$b_2+b_3=a_3+2$．

（1）求数列{b_n}的通项公式；

（2）求数列{a_n+b_n}的前 n 项和 S_n.

16.（13 分）已知函数 f（x）= - 2sinx - cos2x.

（1）比较 f（$\frac{\pi}{4}$），f（$\frac{\pi}{6}$）的大小；

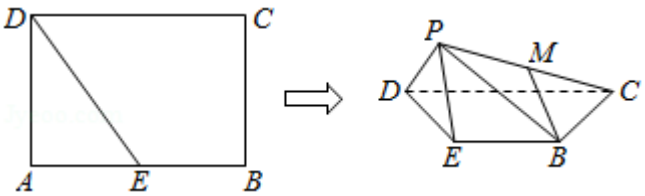
（2）求函数 f（x）的最大值.

17.（14 分）已知长方形 ABCD 中，AD=$\sqrt{2}$，AB=2，E 为 AB 中点．将△ADE 沿 DE 折起到△PDE，得到四棱锥 P - BCDE，如图所示.

（1）若点 M 为 PC 中点，求证：BM∥平面 PDE；

（2）当平面 PDE⊥平面 BCDE 时，求四棱锥 P - BCDE 的体积；

（3）求证：DE⊥PC.



18.（13 分）某空调专卖店试销 A、B、C 三种新型空调，销售情况如表所示：

	第一周	第二周	第三周	第四周	第五周
A 型数量（台）	11	10	15	A_4	A_5
B 型数量（台）	9	12	13	B_4	B_5
C 型数量（台）	15	8	12	C_4	C_5

（1）求 A 型空调前三周的平均周销售量；

（2）为跟踪调查空调的使用情况，根据销售记录，从前三周售出的所有空调中随机抽取一台，求抽到的空调不是 B 型且不是第一周售出空调的概率；

（3）根据 C 型空调前三周的销售情况，预估 C 型空调五周的平均周销售量为 10 台，当 C 型空调周销售量的方差最小时，求 C_4，C_5 的值.

（注：方差 $s^2=\frac{1}{n}[（x_1-\bar{x}）^2+（x_2-\bar{x}）^2+…+（x_n-\bar{x}）^2]$，其中 $\bar{x}$ 为 x_1，x_2，…，x_n 的平均数）

19.（13 分）已知函数 f（x）=$x^3+ax^2-a^2x-1$，a＞0.

（1）当 a=2 时，求函数 f（x）的单调区间；

（2）若关于 x 的不等式 f（x）≤0 在[1，+∞）上有解，求 a 的取值范围；

（3）若存在 x_0，使得 x_0 既是函数 f（x）的零点，又是函数 f（x）的极值点，请写出此时 a 的值.（只需写出结论）

20.（14 分）已知曲线 W：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$（y≥0），直线 l：y=kx+1 与曲线 W 交于 A，D 两点，A，D 两点

在 x 轴上的射影分别为点 B，C.

（1）当点 B 坐标为（﹣1，0）时，求 k 的值；

（2）记△OAD 的面积为 S_1，四边形 ABCD 的面积为 S_2.

（i）若 $S_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}$，求线段 AD 的长度；

（ii）求证：$\frac{S_1}{S_2}\geqslant\frac{1}{2}$.

参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1.【解答】∵全集 U={x|x＞0}，集合 M={x|x＞1}，

∴$\complement_U M=\{x|0<x\leqslant 1\}$.

故选 B.

2.【解答】数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=2$，且（n+1）$a_n=na_{n+1}$，

∴$a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$，

∴$a_2=\frac{1+1}{1}a_1=2\times 2=4$，

∴$a_3=\frac{2+1}{2}\times a_2=\frac{3}{2}\times 4=6$，

故选：B.

3.【解答】若 p∧q 为真命题，

则 p，q 是真命题，

则 p∨q 是真命题，

故选：C.

4.【解答】由向量$\vec{a}$=（1，2），$\vec{b}$=（2，t），且$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，

∴2+2t=0.

解得 t=﹣1.

则$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$.

故选：A.

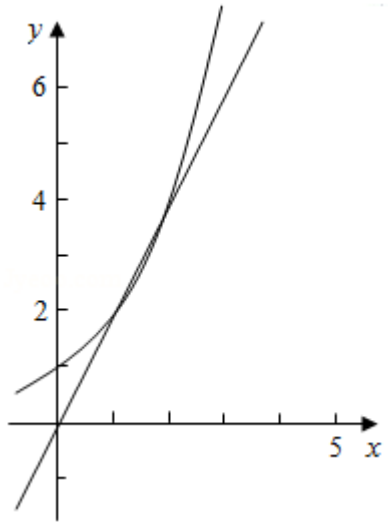
5.【解答】函数 f（x）=2x﹣2^x的零点的个数可化为 y=2x 与 $y=2^x$的图象的交点的个数，

作 y=2x 与 $y=2^x$的图象如下，

结合图象可知，

函数图象有两个不同的交点，

故选 B.



6.【解答】∵A∈（0，π），B∈（0，π），cosA=$\frac{3}{5}$，cosB=$\frac{4}{5}$，

∴sinA=$\sqrt{1-\cos^2 A}$=$\frac{4}{5}$，sinB=$\sqrt{1-\cos^2 B}$=$\frac{3}{5}$，

∴sin（A+B）=sinAcosB+cosAsinB=$\frac{4}{5}\times\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}$=1.

故选：D.

7.【解答】抛物线的准线 l：x=﹣1，焦点 C（1，0），

由抛物线定义可得|QC|=x_Q+1，

圆（x﹣1）^{2}+y^2=25 的圆心为（1，0），半径为 5，

可得△PQC 的周长=|QC|+|PQ|+|PC|=x_Q+1+（x_P﹣x_Q）+5=6+x_P，

由抛物线 y^2=4x 及圆（x﹣1）^{2}+y^2=25 可得交点的横坐标为 4，

即有 x_P∈（4，6），

可得 6+x_P∈（10，12），

故△PQC 的周长的取值范围是（10，12）.

故选：C.

8.【解答】连结 A_1C，AC，B_1C，D_1C，

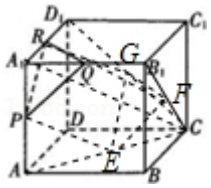
分别取 AC，B_1C，D_1C 的中点 E，F，G，连结 EF，EG，FG.

由中位线定理可得 PE$\overset{//}{=}$$A_1C$，QF$\overset{//}{=}$$A_1C$，RG$\overset{//}{=}$$A_1C$.

又 A_1C⊥平面 PQR，∴三棱柱 PQR﹣EFG 是正三棱柱.

∴三棱柱的高 h=PE=$\frac{1}{2}$$A_1C$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选：D．



二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9．【解答】$\frac{2+i}{1+ai}$=i，其中 i 为虚数单位，a∈R，

可得 2+i=﹣a+i．可得 a=﹣2．

故答案为：﹣2．

10．【解答】由频率分布直方图知：（0.04+0.12+a+b+0.05）×2=1，

∴a+b=0.29，

∴参加实践活动时间在 6﹣10 小时内的频率为 0.29×2=0.58，

∴这 100 名学生中参加实践活动时间在 6﹣10 小时内的人数为 100×0.58=58．

故答案为：58

11．【解答】双曲线的渐近线为 y=±$\frac{1}{a}$x，

∵双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2$=1 的一条渐近线与直线 y=﹣x+1 垂直，

∴渐近线的斜率为 1，

即±$\frac{1}{a}$=1，则 a=±1，

即双曲线方程为 x^2﹣y^2=1，

则 a=1，b=1，c=$\sqrt{2}$，

则焦距 2c=2$\sqrt{2}$，

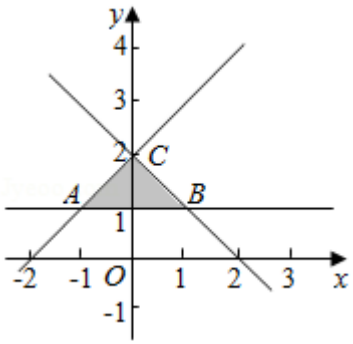
故答案为：2$\sqrt{2}$，

12．【解答】不等式组表示的平面区域如图：

区域内的点到原点距离的最大值为 C 到原点的距离是 2，最小值是（0，1）到原点的距离为 1，

所原点 O 与点 P 距离的取值范围是[1，2]；

故答案为[1，2]



13.【解答】因为甲、丙阅读量之和等于乙、丁阅读量之和，甲、乙阅读量之和等于大于丙、丁阅读量之和，

所以乙的阅读量大于丙的阅读量，甲的阅读量大于丁的阅读量，

因为丁的阅读量大于乙、丙阅读量之和，

所以这四名同学按阅读量从大到小的排序依次为甲丁乙丙，

故答案为：甲丁乙丙

14.【解答】①若只有 A、B 两点在函数 f（x）=sinωx 的图象上，

则有 $\sin(\omega\cdot\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin(\omega\cdot\frac{\pi}{4})=1$，$\sin\omega\cdot\frac{\pi}{2}\neq 0$，

则 $\begin{cases}\omega\cdot\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{3}，\text{或}\ \omega=2k\pi+\frac{2\pi}{3}，k\in Z\\ \omega\cdot\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in Z\\ \omega\cdot\frac{\pi}{2}\neq k\pi，k\in Z\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\omega=12k+2，\text{或}\ \omega=12k+4，k\in Z\\ \omega=8k+2，k\in Z\\ \omega\neq 2k，k\in Z\end{cases}$，求得 ω 无解.

②若只有点 A（$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），C（$\frac{\pi}{2}$，0）在函数 f（x）=sin（ωx）的图象上，

则有 $\sin(\omega\cdot\frac{\pi}{6})=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin(\omega\cdot\frac{\pi}{2})=0$，$\sin(\omega\cdot\frac{\pi}{4})\neq 1$，

故有 $\begin{cases}\omega\cdot\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{3}，\text{或}\ \omega\cdot\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{2\pi}{3}，k\in Z\\ \omega\cdot\frac{\pi}{2}=k\pi，k\in Z\\ \omega\cdot\frac{\pi}{4}\neq 2k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in Z\end{cases}$，

即 $\begin{cases}\omega=12k+2，或\omega=12k+4，k\in Z\\ \omega=2k，k\in Z\\ \omega\neq 8k+2，k\in Z\end{cases}$，求得 ω 的最小值为 4．

③若只有点 B（$\frac{\pi}{4}$，1）、C（$\frac{\pi}{2}$，0）在函数 f（x）=sinωx 的图象上，

则有 $\sin\omega\cdot\frac{\pi}{6}\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\sin\omega\frac{\pi}{4}=1$，$\sin\omega\frac{\pi}{2}=0$，

故有 $\begin{cases}\omega\cdot\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{2}，k\in Z\\ \omega\cdot\frac{\pi}{2}=k\pi，k\in Z\\ \omega\cdot\frac{\pi}{6}\neq 2k\pi+\frac{\pi}{3}，且\ \omega\cdot\frac{\pi}{6}\neq 2k\pi+\frac{2\pi}{3}，k\in Z\end{cases}$，即 $\begin{cases}\omega=8k+2，k\in Z\\ \omega=2k，k\in Z\\ \omega\neq 12k+2且\omega\neq 12k+4，k\in Z\end{cases}$，

求得 ω 的最小正值为 10，

综上可得，ω 的最小正值为 4，

故答案为：4．

三、解答题（共 6 小题，满分 80 分）

15．【解答】（1）设各项都是正数的等比数列{b_n}的公比为 q，

由题意可得 $b_1=2$，$b_2+b_3=12$，

即有 $2q+2q^2=12$，解得 q=2（﹣3 舍去），

即有 $b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，

（2）$a_n+b_n=4n-2+2^n$，

前 n 项和 S_n=（2+6+…+4n﹣2）+（2+4+…+2^n）

$=\frac{1}{2}$（2+4n﹣2）n+$\frac{2(1-2^n)}{1-2}$

$=2n^2+2^{n+1}-2$．

16．【解答】（1）f（$\frac{\pi}{4}$）=﹣$\sqrt{2}$，

f（$\frac{\pi}{6}$）=﹣$\frac{3}{2}$，

∵﹣$\sqrt{2}$>﹣$\frac{3}{2}$，

∴f（$\frac{\pi}{4}$）>f（$\frac{\pi}{6}$），

（2）∵f（x）=﹣2sinx﹣cos2x．

=﹣2sinx﹣1+$2\sin^2x$，

$=2(\sin x-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}$,

∴函数 f（x）的最大值为 3.

17.【解答】（1）如图 1，取 PD 的中点 F，连接 EF，FM，

由条件知：FM 平行且等于 DC 的一半，EB 平行且等于 DC 的一半，

∴FM∥EB，且 FM=EB，

则四边形 EFMB 是平行四边形，

则 BM∥EF，

∵BM⊄平面 PDE，EF⊂平面 PDE，

∴BM∥平面 PDE.

（2）如图 2，以 A 为原点，分别以 AB，AD 为 x，y 轴正方向建立直角坐标系，连接 AC，设 AC 交 DE 于点 H，

∵长方形 ABCD 中，AD=$\sqrt{2}$，AB=2，E 为 AB 中点.

∴可得：A（0，0），C（2，$\sqrt{2}$），E（1，0），D（0，$\sqrt{2}$），

∴$\overrightarrow{AC}$=（2，$\sqrt{2}$），$\overrightarrow{DE}$=（1，$-\sqrt{2}$），

∴$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DE}=2\times1+\sqrt{2}\times(-\sqrt{2})=0$，可得：AC⊥DE，

∴AH⊥DE，CD⊥DE，

∴由平面 PDE⊥平面 BCDE，可得：PH⊥平面 BCDE，则 PH 是四棱锥 P－BCDE 的高，

由已知可得，在△PDE 中，PD=$\sqrt{2}$，PE=1，则 PH=$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

∵四边形 BCDE 是直角梯形，BE=1，DC=2，BC=$\sqrt{2}$，可得：四边形 BCDE 的面积 S=$\frac{(1+2)\times\sqrt{2}}{2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$，

∴四棱锥 P－BCDE 的体积 V=$\frac{1}{3}S\cdot PH=\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（3）∵由（2）可得：AH⊥DE，CH⊥DE，

∴PH⊥DE，CH⊥DE，PH∩CH=H，

∴可得：DE⊥平面 PHC，PC⊂平面 PHC，

∴DE⊥PC.

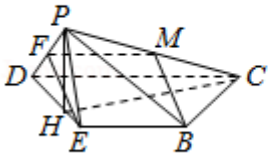


图1

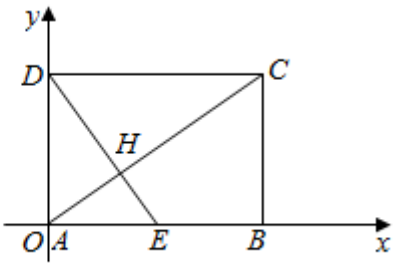


图2

18.【解答】（1）A 型空调前三周的平均周销售量：

$\overline{x}=\frac{11+10+15}{5}$=12 台.

（2）设抽到的空调不是 B 型且不是第一周售出的空调为事件 P_1，

则 $P_1=\frac{10+15+8+12}{35+30+40}=\frac{3}{7}$.

（3）∵C 型空调平均周销售量为 10 台，

∴$c_4+c_5=10\times5-15-8-12=15$，

又 $S^2=\frac{1}{5}[(15-10)^2+(8-10)^2+(12-10)^2+(c_4-10)^2+(c_5-10)^2]$，

化简，得 $S^2=\frac{1}{5}[2(c_4-\frac{15}{2})^2+\frac{91}{2}]$，

∵$c_4\in N$，∴当 $c_4=7$ 或 $c_4=8$ 时，S^2 取得最小值，

∴当 $\begin{cases}c_4=7\\c_5=8\end{cases}$ 或 $\begin{cases}c_4=8\\c_5=7\end{cases}$ 时，S^2 取得最小值.

19.【解答】（1）a=2 时，$f(x)=x^3+2x^2-4x-1$，

$f'(x)=3x^2+4x-4=(3x-2)(x+2)$，

令 $f'(x)>0$，解得：$x>\frac{2}{3}$ 或 $x<-2$，

令 $f'(x)<0$，解得：$-2<x<\frac{2}{3}$，

∴$f(x)$ 在 $(-\infty,-2)$ 递增，在 $(-2,\frac{2}{3})$ 递减，在 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 递增；

（2）$f'(x)=3x^2+2ax-a^2=(3x-a)(x+a)$，

令 $f'(x)>0$，解得：$x>\frac{a}{3}$ 或 $x<-a$，令 $f'(x)<0$，解得：$-a<x<\frac{a}{3}$，

∴$f(x)$ 在 $(-\infty,-a)$ 递增，在 $(-a,\frac{a}{3})$ 递减，在 $(\frac{a}{3},+\infty)$ 递增，

①$\frac{a}{3}\leqslant1$ 即 $a\leqslant3$ 时，$f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 递增，

若关于 x 的不等式 $f(x)\leqslant0$ 在 $[1,+\infty)$ 上有解，

只需 f（x）$_{min}$=f（1）=a（1﹣a）≤0，解得：a≥1，

故 1≤a≤3；

②$\frac{a}{3}$>1，即 a>3 时，

f（x）在[1，$\frac{a}{3}$）递减，在（$\frac{a}{3}$，+∞）递增，

∴f（x）$_{min}$=f（$\frac{a}{3}$）=﹣$\frac{5}{27}$a^3﹣1<0 恒成立，

故 a>3，

综上，a≥1；

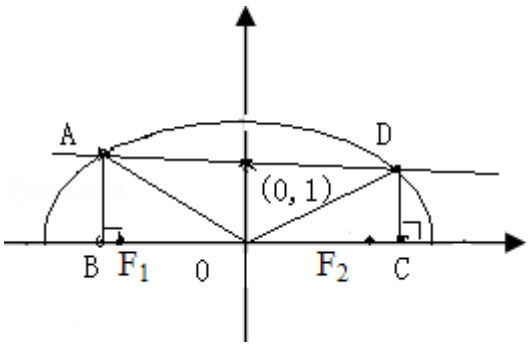
（3）由（2）得：x=﹣a 是 f（x）的零点，

故 f（﹣a）=a^3﹣1=0，解得：a=1.

20.【解答】（1）由题意，y=kx+1 与曲线 W 交于 A，D 两点，A，D 两点在 x 轴上的射影分别为点 B，C．点 B 坐标为（﹣1，0），则点 A 的横坐标为﹣1，带入曲线 W：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，解得点 A 的纵坐标为 $\frac{3}{2}$，即 A（﹣1，$\frac{3}{2}$）

∵点 A 在直线 y=kx+1，则有：$\frac{3}{2}=k\times(-1)+1$，

∴解得 k=﹣$\frac{1}{2}$



（2）（i）由题意，k 不存在时，四边形 ABCD 也不存在，所以 k 必须存在．

设点 A（x_A，y_A），点 D（x_D，y_D），则点 B（x_A，0），点 C（x_D，0）

直线 l：y=kx+1 与曲线 W 交于 A，D 两点，

A，D 两点带入：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，y=kx+1，消去 y，

解得：$x_A+x_D=\frac{-8k}{3+4k^2}$

$x_Ax_D=\frac{-8}{3+4k^2}$

$|AD|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_A+x_D)^2-4x_Ax_D}=\frac{4\sqrt{6}(k^2+1)}{3+4k^2}$

△OAD 的面积为 S_1，设原点（0，0）到直线 l：y=kx+1 距离为 h，

则 $h=\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}$

$S_1=\frac{2\sqrt{6}}{3}=\frac{1}{2}|AD|\cdot h$

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$|AD|=\frac{4\sqrt{6}(k^2+1)}{3+4k^2}=\frac{7\sqrt{6}}{6}$

（ii）由题意及（i）：可知：$S_1=\frac{1}{2}|AD|\cdot h=\frac{1}{2}\times\frac{4\sqrt{6}(k^2+1)}{3+4k^2}\times\frac{1}{\sqrt{k^2+1}}=2\times\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2}$

A，D 两点带入：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，y=kx+1，消去 x

$y_A+y_D=\frac{6}{3+4k^2}$

四边形 ABCD 的面积为 S_2

$S_2=\frac{1}{2}(y_A+y_D)\cdot(x_A+x_D)=\frac{1}{2}\times\frac{6}{3+4k^2}\times|\frac{-8k}{3+4k^2}|=\frac{24k}{(3+4k^2)^2}$

那么：$\frac{S_1}{S_2}=（2\times\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{k^2+1}}{3+4k^2}）\div\frac{24k}{(3+4k^2)^2}=\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{k^2+1}\cdot(3+4k^2)}{12k}=\frac{\sqrt{6}}{12}\cdot\sqrt{\frac{(k^2+1)(3+4k^2)^2}{k^2}}\geqslant\frac{1}{2}$

得证.