2016 北京朝阳高三二模

数　　学（理）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

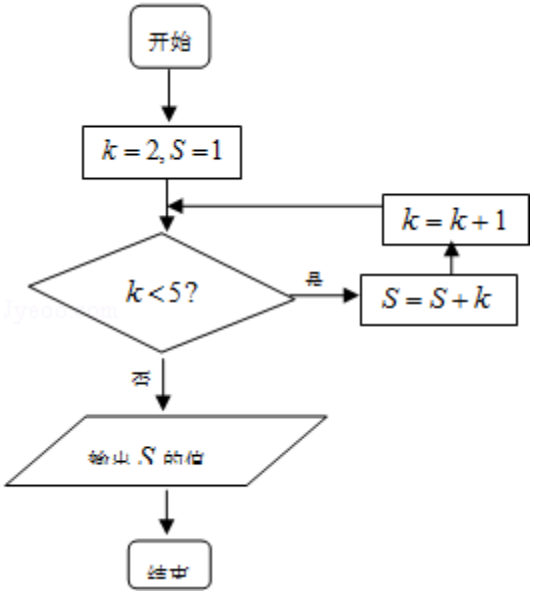
1．（5 分）已知集合 A={x|1＜2^x＜4}，B={x|x－1≥0}，则 A∩B=（　　）

A．{x|1≤x＜2}　B．{x|0＜x≤1}　C．{x|0＜x＜1}　D．{x|1＜x＜2}

2．（5 分）已知复数 z=$\frac{i}{1-i}$（i 是虚数单位），则 z 在复平面上对应的点在（　　）

A．第一象限 B．第二象限 C．第三象限 D．第四象限

3．（5 分）执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为（　　）



A．6　　B．10　　C．14　　D．15

4．（5 分）已知非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，“$\vec{a}$//$\vec{b}$”是“$\vec{a}$//（$\vec{a}$+$\vec{b}$）”的（　　）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

5．（5 分）同时具有性质：

①最小正周期是 π；

②图象关于直线 x=$\frac{\pi}{3}$对称；

③在区间 [$\frac{5\pi}{6}$，π]上是单调递增函数”的一个函数可以是（　　）

A．$y=\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})$　B．$y=\sin(2x+\frac{5\pi}{6})$　C．$y=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$　D．$y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

6．（5 分）已知函数 f（x）=$\begin{cases} x-1, & x\leqslant 2 \\ 2+\log_a x, & x>2 \end{cases}$（a＞0 且 a≠1）的最大值为 1，则 a 的取值范围是（　　）

A. $[\frac{1}{2}, 1)$ B.（0，1） C. $(0, \frac{1}{2}]$ D.（1，+∞）

7.（5 分）某学校高三年级有两个文科班，四个理科班，现每个班指定 1 人，对各班的卫生进行检查，若每班只安排一人检查，且文科班学生不检查文科班，理科班学生不检查自己所在的班，则不同安排方法的种数是（　　）

A．48　B．72　C．84　D．168

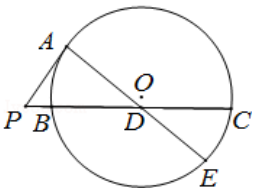
8.（5 分）已知正方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，E 是棱 D_1C_1 的中点，点 F 在正方体内部或正方体的表面上，且 EF∥平面 A_1BC_1，则动点 F 的轨迹所形成的区域面积是（　　）

A. $\frac{9}{2}$　B. $2\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{2}$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9.（5 分）双曲线 C：$\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的渐近线方程是_____；若抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）的焦点与双曲线 C 的一个焦点重合，则 p=_____.

10.（5 分）如图，P 为⊙O 外一点，PA 是⊙O 的切线，A 为切点，割线 PBC 与⊙O 相交于 B，C 两点，且 PC=3PA，D 为线段 BC 的中点，AD 的延长线交⊙O 于点 E．若 PB=1，则 PA 的长为_____；AD•DE 的值是_____.



11.（5 分）已知等边△ABC 的边长为 3，D 是 BC 边上一点，若 BD=1，则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的值是_____.

12.（5 分）已知关于 x，y 的不等式组 $\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant x \\ x+y\leqslant 2 \\ 2x-y\geqslant k \end{cases}$ 所表示的平面区域 D 为三角形区域，则实数 k 的取值范围是_____.

13.（5 分）为了响应政府推进“菜篮子”工程建设的号召，某经销商投资 60 万元建了一个蔬菜生产基地．第一年支出各种费用 8 万元，以后每年支出的费用比上一年多 2 万元．每年销售蔬菜的收入为 26 万元．设 f（n）表示前 n 年的纯利润（f（n）=前 n 年的总收入－前 n 年的总费用支出－投资额），则 f（n）=_____（用 n 表示）；从第_____年开始盈利.

14.（5 分）在平面直角坐标系 xOy 中，以点 A（2，0），曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 上的动点 B，第一象限内的点 C，构成等腰直角三角形 ABC，且∠A=90°，则线段 OC 长的最大值是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（13 分）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别是 a，b，c，已知 $\cos 2A=-\frac{1}{3}$，$c=\sqrt{3}$，$\sin A=\sqrt{6}\sin C$.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ） 若角 A 为锐角，求 b 的值及△ABC 的面积.

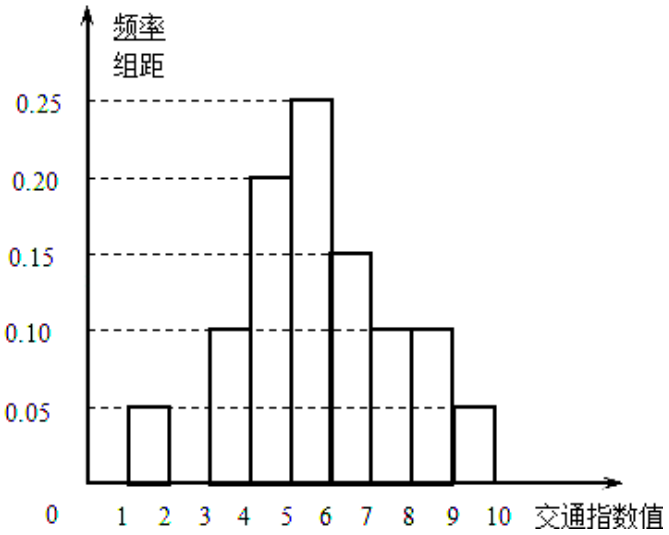
16.（13 分）交通指数是交通拥堵指数的简称，是综合反映某区域道路网在某特定时段内畅通或拥堵实际情况的概念性指数值．交通指数范围为（0，10），五个级别规定如下：

交通指数	（0，2）	[2，4）	[4，6）	[6，8）	[8，10）
级别	畅通	基本畅通	轻度拥堵	中度拥堵	严重拥堵

某人在工作日上班出行每次经过的路段都在同一个区域内，他随机记录了上班的 40 个工作日早高峰时段（早晨 7 点至 9 点）的交通指数（平均值），其统计结果如直方图所示．

（Ⅰ）据此估计此人 260 个工作日中早高峰时段（早晨 7 点至 9 点）中度拥堵的天数；

（Ⅱ）若此人早晨上班路上所用时间近似为：畅通时 30 分钟，基本畅通时 35 分钟，轻度拥堵时 40 分钟，中度拥堵时 50 分钟，严重拥堵时 70 分钟，以直方图中各种路况的频率作为每天遇到此种路况的概率，求此人上班路上所用时间 X 的数学期望．



17.（14 分）如图 1，在等腰梯形 ABCD 中，BC∥AD，BC=$\frac{1}{2}$AD=2，∠A=60°，E 为 AD 中点，点 O，F 分别为 BE，DE 的中点．将△ABE 沿 BE 折起到△A_1BE 的位置，使得平面 A_1BE⊥平面 BCDE（如图 2）．

（Ⅰ）求证：A_1O⊥CE；

（Ⅱ）求直线 A_1B 与平面 A_1CE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）侧棱 A_1C 上是否存在点 P，使得 BP∥平面 A_1OF？若存在，求出$\frac{A_1P}{A_1C}$的值；若不存在，请说明理由．

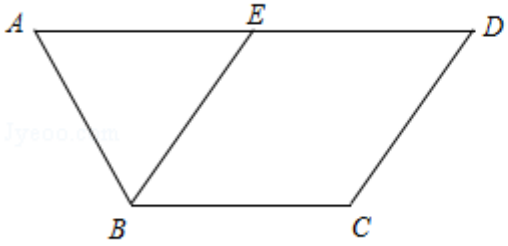


图 1

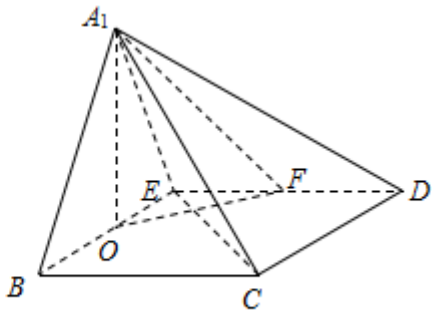


图 2

18.（13 分）已知函数 f（x）=$-\frac{1}{2}x^2$+（a+1）x+（1－a）lnx，a∈R.

（Ⅰ）当 a=3 时，求曲线 C：y=f（x）在点（1，f（1））处的切线方程；

（Ⅱ）当 x∈[1，2]时，若曲线 C：y=f（x）上的点（x，y）都在不等式组$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\\ y\leqslant x+\frac{3}{2}\end{cases}$所表示的平面区域内，试求 a 的取值范围.

19.（14 分）在平面直角坐标系 xOy 中，点 P（x_0，y_0）（$y_0\neq 0$）在椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上，过点 P 的直线 l 的方程为$\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的离心率；

（Ⅱ）若直线 l 与 x 轴、y 轴分别相交于 A，B 两点，试求△OAB 面积的最小值；

（Ⅲ）设椭圆 C 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，点 Q 与点 F_1 关于直线 l 对称，求证：点 Q，P，F_2 三点共线.

20.（13 分）已知集合 S=$\{k|1\leqslant k\leqslant\frac{3^n-1}{2},\ k\in N^*\}$（n≥2，且 n∈$N^*$）. 若存在非空集合 S_1，S_2，…，S_n，使得 S=$S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_n$，且 $S_i\cap S_j=\varnothing$（1≤i，j≤n，i≠j），并∀x，y∈S_i（i=1，2，…，n），x＞y，都有 x－y∉S_i，则称集合 S 具有性质 P，S_i（i=1，2，…，n）称为集合 S 的 P 子集.

（Ⅰ）当 n=2 时，试说明集合 S 具有性质 P，并写出相应的 P 子集 S_1，S_2；

（Ⅱ）若集合 S 具有性质 P，集合 T 是集合 S 的一个 P 子集，设 T′ ={s+3^n|s∈T}，求证：∀x，y∈T∪T′ ，x＞y，都有 x－y∉T∪T′ ；

（Ⅲ）求证：对任意正整数 n≥2，集合 S 具有性质 P.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】由 A 中不等式变形得：$2^0=1<2^x<4=2^2$，

解得：$0<x<2$，即 $A=\{x|0<x<2\}$，

由 B 中不等式解得：$x\geqslant 1$，即 $B=\{x|x\geqslant 1\}$，

则 $A\cap B=\{x|1\leqslant x<2\}$，

故选：A.

2.【解答】复数 $z=\frac{i}{1-i}=\frac{i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$，在复平面内对应点为 $(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，

此点位于第二象限，

故选 B，

3.【解答】模拟执行程序，可得

$k=2$，$S=1$

满足条件 $k<5$，执行循环体，$S=3$，$k=3$

满足条件 $k<5$，执行循环体，$S=6$，$k=4$

满足条件 $k<5$，执行循环体，$S=10$，$k=5$

不满足条件 $k<5$，退出循环，输出 S 的值为 10.

故选：B.

4.【解答】非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，由 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，可得存在非 0 实数 k 使得 $\vec{a}=k\vec{b}$，

$\therefore \vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+\frac{1}{k}\vec{a}=(1+\frac{1}{k})\vec{a}$，

$\therefore \vec{a}\parallel(\vec{a}+\vec{b})$，

反之：由 $\vec{a}\parallel(\vec{a}+\vec{b})$，可得存在非 0 实数 k 使得 $\vec{a}+\vec{b}=k\vec{a}$，化为 $\vec{b}=(k-1)\vec{a}$，$\therefore \vec{a}\parallel\vec{b}$.

$\therefore$“$\vec{a}\parallel\vec{b}$”是“$\vec{a}\parallel(\vec{a}+\vec{b})$”的充要条件，

故选：C.

5.【解答】对于 $y=\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6})$，它的周期为 $\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}=4\pi$，故不满足条件.

对于 y=sin（2x+$\frac{5\pi}{6}$），在区间 [$\frac{5\pi}{6}$，π]上，2x+$\frac{5\pi}{6}$∈[$\frac{5\pi}{2}$，$\frac{17\pi}{6}$]，故该函数在区间 [$\frac{5\pi}{6}$，π]上不是单调递增函数，故不满足条件.

对于 y=cos（2x－$\frac{\pi}{3}$），当 x=$\frac{\pi}{3}$时，函数 y=$\frac{1}{2}$，不是最值，故不满足②它的图象关于直线 x=$\frac{\pi}{3}$对称，故不满足条件.

对于 y=sin（2x－$\frac{\pi}{6}$），它的周期为$\frac{2\pi}{2}$=π，当 x=$\frac{\pi}{3}$时，函数 y=1，是函数的最大值，满足它的图象关于直线 x=$\frac{\pi}{3}$对称；

且在区间 [$\frac{5\pi}{6}$，π]上，2x－$\frac{\pi}{6}$∈[$\frac{3\pi}{2}$，$\frac{11\pi}{6}$]，故该函数在区间 [$\frac{5\pi}{6}$，π]上是单调递增函数，满足条件.

故选：D.

6.【解答】∵当 x≤2 时，f（x）=x－1，

∴$f(x)_{max}$=f（2）=1

∵函数 f（x）=$\begin{cases} x-1, & x\leqslant 2 \\ 2+\log_a x, & x>2 \end{cases}$（a＞0 且 a≠1）的最大值为 1

∴当 x＞2 时，2+$\log_a x$≤1.

∴$\begin{cases} 0<a<1 \\ \log_a 2\leqslant -1 \end{cases}$，

解得 a∈[$\frac{1}{2}$，1）

故选：A

7.【解答】第一步选 2 名理科班的学生检查文科班，有 A_4^2=12 种，

第二步，分三类，第 1 类，2 名文科生检查剩下的 2 名理科生所在的班级，2 名理科生检查另 2 名理科生所在的班级，有 $A_2^2A_2^2$=4 种，

第 2 类，2 名文科生检查去文科班检查的 2 名理科生所在的班级，剩下的 2 名理科生互查所在的班级，有 $A_2^2A_1^1$=2 种，

第 3 类，2 名文科生一人去检查去文科班检查的 2 名理科生所在的班级的一个和一人去查剩下的 2 名理科生其中一个所在的班级，有 $A_2^1A_2^1A_2^1$=8 种，

根据分类分步计数原理可得，共有 12×（4+2+8）=168 种不同安排方法　故选：D.

8.【解答】如图所示：分别取 CC_1、BC、AB、AA_1、A_1D_1 的中点 G、H、M、N、K，并连同点 E 顺次链接，

根据 EG 为△C_1CD_1 的中位线，可得 EG∥CD_1，而 CD_1∥A_1B，∴EG∥A_1B.

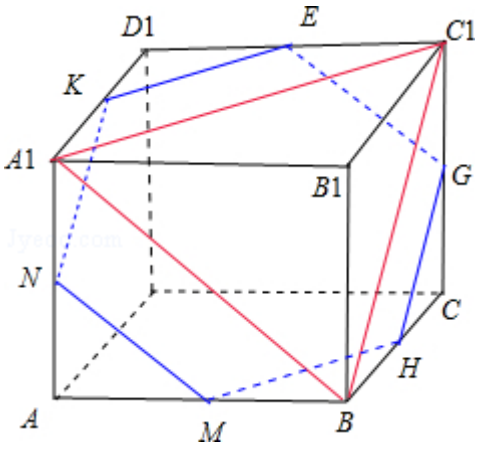
∵A_1B⊂平面 A_1BC_1，EG⊄平面 A_1BC_1，∴EG∥平面 A_1BC_1 .

同理可证，GH、HM、MN、NK、KE 都平行于平面 A_1BC_1，

由题意可得，点 F 的轨迹为正六边形 EGHMNK，该该正六边形 EGHMNK 的边长为$\sqrt{2}$，

故该正六边形 EGHMNK 的面积为 6•（$\frac{1}{2}$•$\sqrt{2}$•$\sqrt{2}$•sin60° ）=3$\sqrt{3}$，

故选：C.



二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9.【解答】在双曲线中，令 1 为 0 得，$\frac{x^2}{3}-y^2=0$，

即双曲线的渐近线为$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

在双曲线中 $c^2=3+1=4$，即 c=2，

则双曲线的焦点坐标为（2，0）或（﹣2，0），

则抛物线的焦点坐标为（2，0），

即$\frac{p}{2}=2$，则 p=4，

故答案为：$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，4

10.【解答】∵PA 是切线，A 为切点，

割线 PBC 与⊙O 相交于点 B，C，

∴$PA^2=PB•PC$，

∵PC=3PA，PB=1，

∴$PA^2=1•3PA$，

∴PA=3；

∵$PA^2=PB•PC$，PC=3PA，

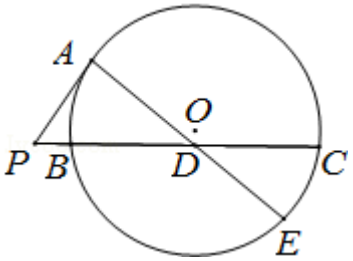
∴PA=3PB，

∴4PB=BD，

∴BD=4，

∴AD•DE=BD•DC=BD^2=16.

故答案为：3，16.



11.【解答】$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\times3\times\cos60°=\frac{9}{2}$.

$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$\therefore\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$,

$\therefore\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}\cdot(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}^2=\frac{2}{3}\times\frac{9}{2}+\frac{1}{3}\times3^2=6$.

故答案为 6.

12.【解答】关于 x，y 不等式组$\begin{cases}x\geqslant0\\y\geqslant x\\x+y\leqslant2\end{cases}$表示的平面区域为如图三角形 ABO：

可知 A（1，21），B（2，0）

而不等式 2x﹣y≥k 表示直线 2x﹣y﹣k=0 的左下方，

直线 2x﹣y﹣k=0 与 y 轴交点坐标为（0，﹣k），

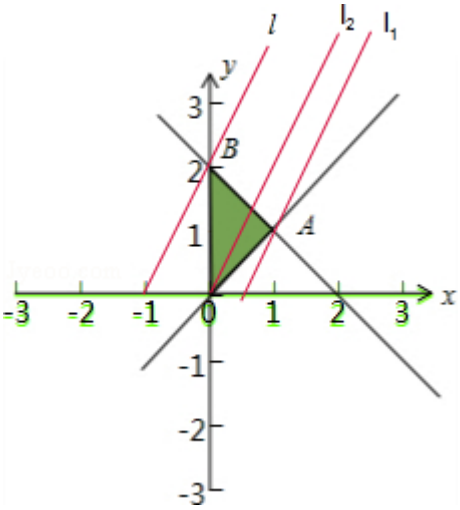
若直线 2x﹣y﹣k=0 与 y 轴交点在线段 OB 上（不包括 B 点，不包括 O 点），直线 2x﹣y﹣k=0 在 l 的左上方，或夹在 l_1与 l_2之间.

或直线 2x﹣y﹣k=0 与直线 x+y=2 的交点在 AB 内，

关于 x，y 的不等式组$\begin{cases}x\geqslant0\\y\geqslant x\\x+y\leqslant2\\2x-y\geqslant k\end{cases}$所表示的平面区域 D 不为三角形区域.

﹣k≥2，0≤﹣k≤2﹣1，解得：k≤﹣2 或﹣1≤k≤0.

故答案为：k≤﹣2 或﹣1≤k≤0.



13.【解答】每年支出的费用构成以 8 为首项，d=2 为公差的等差数列，

则 f（n）=26n - （8n+$\frac{n(n-1)}{2}$×2） - 60= - n^2+19n - 60，

由 f（n）= - n^2+19n - 60＞0 得 n^2 - 19n+60＜0，

即（n - 4）（n - 15）＜0，

得 4＜n＜15，

故当 n=5 时，开始盈利，

故答案为：- n^2+19n - 60，5

14.【解答】曲线 y=$\sqrt{1-x^2}$是以 0 为圆心，1 为半径的上半圆，

可设 B（cos θ，sin θ），0≤ θ ≤ π，C（m，n）（m，n＞0），

由等腰直角三角形 ABC，可得

AB⊥AC，即有$\frac{n}{m-2}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta-2}$= - 1，①

|AB|=|AC|，即有$\sqrt{(m-2)^2+n^2}$=$\sqrt{(\cos\theta-2)^2+\sin^2\theta}$，

即为（m - 2）^{2}+n^2=（cos θ - 2）^{2}+$\sin^2\theta$，②

由①②解得 m=2+sin θ，n=2 - cos θ，

或 m=2 - sin θ，n=cos θ - 2（舍去）.

则|OC|=$\sqrt{(2+\sin\theta)^2+(2-\cos\theta)^2}$

=$\sqrt{8+\sin^2\theta+\cos^2\theta+4\sin\theta-4\cos\theta}$

=$\sqrt{9+4\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})}$，

当 θ - $\frac{\pi}{4}$=$\frac{\pi}{2}$，即 θ=$\frac{3\pi}{4}$∈[0，π]，取得最大值$\sqrt{9+4\sqrt{2}}$=1+2$\sqrt{2}$.

故答案为：$1+2\sqrt{2}$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.【解答】（Ⅰ）在△ABC 中，因为 $c=\sqrt{3}$，$\sin A=\sqrt{6}\sin C$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，

得 $a=\sqrt{6}\cdot c=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$．…（6 分）

（Ⅱ）由 $\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\frac{1}{3}$ 得，$\sin^2 A=\frac{2}{3}$，

由 $0<A<\frac{\pi}{2}$ 得，$\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

则 $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

化简得，$b^2-2b-15=0$，解得 b=5 或 b=－3（舍负）．

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 5\times\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$．　…（13 分）

16.【解答】（Ⅰ）由已知可得：上班的 40 个工作日中早高峰时段中度拥堵的频率为 0.25，

据此估计此人 260 个工作日早高峰时段（早晨 7 点至 9 点）中度拥堵的天数为 260×0.25=65 天．…5 分

（Ⅱ）由题意可知 X 的可能取值为 30，35，40，50，70．

且 P（X=30）=0.05，

P（X=35）=0.10，

P（X=40）=0.45，

P（X=50）=0.25，

P（X=70）=0.15，

∴X 的分布列为：

X	30	35	40	50	70
P	0.05	0.10	0.45	0.25	0.15

∴EX=30×0.05+35×0.1+40×0.45+50×0.25+70×0.15=46．　…13 分

17.【解答】（Ⅰ）如图 1，在等腰梯形 ABCD 中，

∵BC∥AD，$BC=\frac{1}{2}AD=2$，∠A=60°，E 为 AD 中点，

∴△ABE 为等边三角形．

如图 2，∵O 为 BE 的中点，

∴$A_1O\perp BE$.

又∵平面 $A_1BE\perp$平面 BCDE，且平面 $A_1BE\cap$平面 BCDE=BE，

所以 $A_1O\perp$平面 BCDE，所以 $A_1O\perp CE$；

（Ⅱ）如图 2，连结 OC，由已知得 CB=CE，又 O 为 BE 的中点，

∴$OC\perp BE$.

由（Ⅰ）知 $A_1O\perp$平面 BCDE，

∴$A_1O\perp BE$，$A_1O\perp OC$，

∴OA_1，OB，OC 两两垂直.

以 O 为原点，OB，OC，OA_1 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系（如图 2）.

∵BC=2，易知 $OA_1=OC=\sqrt{3}$.

∴ $A_1(0,\ 0,\ \sqrt{3})$，$B(1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ \sqrt{3},\ 0)$，$E(-1,\ 0,\ 0)$，

∴ $\overrightarrow{A_1B}=(1,\ 0,\ -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1C}=(0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{A_1E}=(-1,\ 0,\ -\sqrt{3})$.

设平面 A_1CE 的一个法向量为 n=（x，y，z），

由 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\\ n\cdot\overrightarrow{A_1E}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0\\ -x-\sqrt{3}z=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-z=0\\ x+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

取 z=1，得 $n=(-\sqrt{3},\ 1,\ 1)$.

设直线 A_1B 与平面 A_1CE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\overrightarrow{A_1B},\ n\rangle|=\left|\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}$.

所以直线 A_1B 与平面 A_1CE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

（Ⅲ）如图 3，假设在侧棱 A_1C 上存在点 P，使得 BP∥平面 A_1OF.

设 $\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，$\lambda\in[0,\ 1]$.

∵ $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{BA_1}+\lambda\overrightarrow{A_1C}$，

∴ $\overrightarrow{BP}=(-1,\ 0,\ \sqrt{3})+\lambda(0,\ \sqrt{3},\ -\sqrt{3})=(-1,\ \sqrt{3}\lambda,\ \sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$.

易证四边形 BCDE 为菱形，且 $CE\perp BD$，

又由（Ⅰ）可知，$A_1O\perp CE$，所以 $CE\perp$平面 A_1OF.

所以 $\overrightarrow{CE}=(-1,\ -\sqrt{3},\ 0)$ 为平面 A_1OF 的一个法向量.

由 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CE}=(-1,\ \sqrt{3}\lambda,\ \sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)\cdot(-1,\ -\sqrt{3},\ 0)=1-3\lambda=0$，得 $\lambda=\frac{1}{3}\in[0,\ 1]$.

所以侧棱 A_1C 上存在点 P，使得 BP∥平面 A_1OF，且 $\frac{A_1P}{A_1C}=\frac{1}{3}$.

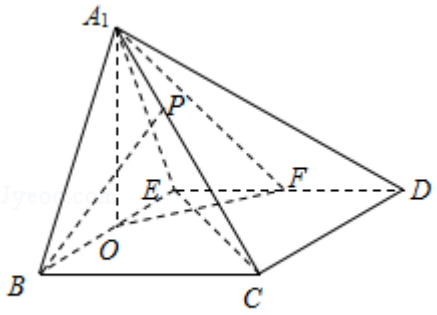


图3

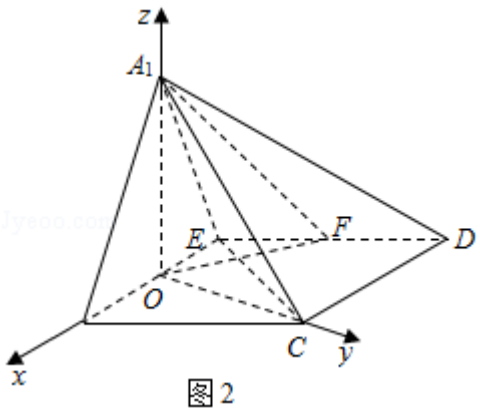


图2

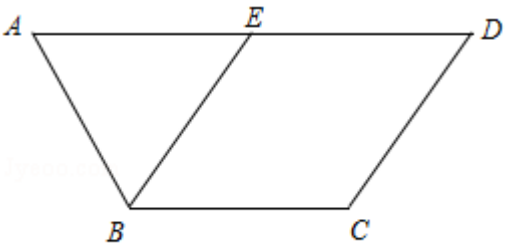


图1

18.【解答】（Ⅰ）当 a=3 时，$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-2\ln x$，x＞0.

导数为 f′（x）=﹣x+4﹣$\frac{2}{x}$，

则 f’（1）=﹣1+4﹣2=1，而$f(1)=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}$.

所以曲线 C 在点（1，f（1））处的切线方程为$y-\frac{7}{2}=x-1$，

即 2x﹣2y+5=0.

（Ⅱ）依题意当 x∈[1，2]时，曲线 C 上的点（x，y）都在不等式组$\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2\\ x\leqslant y\\ y\leqslant x+\frac{3}{2}\end{cases}$所表示的平面区域内，等价于当 1

≤x≤2 时，$x\leqslant f(x)\leqslant x+\frac{3}{2}$恒成立.

设 g（x）=f（x）﹣x=$-\frac{1}{2}x^2+ax+(1-a)\ln x$，x∈[1，2].

所以$g'(x)=-x+a+\frac{1-a}{x}=\frac{-x^2+ax+(1-a)}{x}=\frac{-(x-1)(x-(a-1))}{x}$.

（1）当 a - 1≤1，即 a≤2 时，

当 x∈[1，2]时，g’（x）≤0，g（x）为单调减函数，

所以 g（2）≤g（x）≤g（1）.

依题意应有$\begin{cases} g(1)=a-\frac{1}{2}\leqslant\frac{3}{2} \\ g(2)=-2+2a+(1-a)\ln 2\geqslant(\end{cases}$，

解得$\begin{cases} a\leqslant 2 \\ a\geqslant 1 \end{cases}$，即 1≤a≤2；

（2）若 1＜a - 1＜2，即 2＜a＜3 时，

当 x∈[1，a - 1)，g’（x）≥0，g（x）为单调增函数，

当 x∈（a - 1，2]，g’（x）＜0，g（x）为单调减函数.

由于$g(1)>\frac{3}{2}$，所以不合题意.

（3）当 a - 1≥2，即 a≥3 时，注意到$g(1)=a-\frac{1}{2}\geqslant\frac{5}{2}$，显然不合题意.

综上所述，1≤a≤2.

19.【解答】（Ⅰ）依题意可知$a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2-1}=1$，

所以椭圆 C 离心率为$e=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$；

（Ⅱ）因为直线 l 与 x 轴，y 轴分别相交于 A，B 两点，所以 $x_0\neq 0$，$y_0\neq 0$.

令 y=0，由$\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$得$x=\frac{2}{x_0}$，则$A(\frac{2}{x_0},\ 0)$.

令 x=0，由$\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$得$y=\frac{1}{y_0}$，则$B(0,\ \frac{1}{y_0})$.

所以△OAB 的面积$S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=\frac{1}{2}|\frac{2}{x_0y_0}|=\frac{1}{|x_0y_0|}$.

因为点 P（x_0，y_0）在椭圆 C：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上，所以$\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$.

所以$1=\frac{x_0^2}{2}+y_0^2\geqslant 2\cdot\frac{|x_0y_0|}{\sqrt{2}}$，即$|x_0y_0|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，则$\frac{1}{|x_0y_0|}\geqslant\sqrt{2}$.

所以$S_{\triangle OAB}\geqslant\sqrt{2}$，

当且仅当$\frac{x_0^2}{2}=y_0^2$，即$x_0=\pm 1$，$y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$时，

△OAB 面积的最小值为$\sqrt{2}$.

（Ⅲ）证明：①当 $x_0=0$ 时，P（0，±1）.

当直线 l：y=1 时，易得 Q（－1，2），此时 $k_{F_2P}=-1$，$k_{F_2Q}=-1$.

因为 $k_{F_2Q}=k_{F_2P}$，所以三点 Q，P，F_2 共线.

同理，当直线 l：y=－1 时，三点 Q，P，F_2 共线.

②当 $x_0\neq 0$ 时，设点 Q（m，n），因为点 Q 与点 F_1 关于直线 l 对称，

所以 $\begin{cases}\frac{x_0}{2}\cdot\frac{m-1}{2}+y_0\cdot\frac{n}{2}=1\\ \frac{\frac{n}{2}-0}{\frac{m-1}{2}+1}\cdot(-\frac{x_0}{2y_0})=-1\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}x_0m+2y_0n-x_0-4=0\\ 2y_0m-x_0n+2y_0=0\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=\frac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}\\ n=\frac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2}\end{cases}$，

所以点 $Q(\frac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2},\ \frac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2})$.

又因为 $\overrightarrow{F_2P}=(x_0-1,\ y_0)$，$\overrightarrow{F_2Q}=(\frac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}-1,\ \frac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2})$，

且 $(\frac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}-1)\cdot y_0-\frac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2}\cdot(x_0-1)=y_0\cdot\frac{(4x_0-8y_0^2)-(4x_0+8)(x_0-1)}{4y_0^2+x_0^2}$

$=y_0\cdot\frac{4x_0-8y_0^2-(4x_0^2+4x_0-8)}{4y_0^2+x_0^2}$

$=y_0\cdot\frac{-8y_0^2-4x_0^2+8}{4y_0^2+x_0^2}=y_0\cdot\frac{-4(2y_0^2+x_0^2)+8}{4y_0^2+x_0^2}=y_0\cdot\frac{-4\times 2+8}{4y_0^2+x_0^2}=0.$

所以 $\overrightarrow{F_2P}\parallel\overrightarrow{F_2Q}$. 所以点 Q，P，$F_2$ 三点共线.

综上所述，点 Q，P，F_2 三点共线.

20.【解答】（Ⅰ）当 n=2 时，S={1，2，3，4}，令 S_1={1，4}，S_2={2，3}，

则 $S=S_1\cup S_2$，且对∀x，y∈S_i（i=1，2），x＞y，都有 x－y∉S_i，

所以 S 具有性质 P. 相应的 P 子集为 S_1={1，4}，S_2={2，3}.

（Ⅱ）①若 $x,\ y\in T(1\leqslant y<x\leqslant\frac{3^n-1}{2})$，由已知 x－y∉T，

又 $x-y\leqslant\frac{3^n-1}{2}-1<3^n$，所以 x－y∉T’. 所以 x－y∉T∪T’.

②若 x，y∈T’，可设 $x=s+3^n$，$y=r+3^n$，r，s∈T，且 $1\leqslant r<s\leqslant\frac{3^n-1}{2}$，

此时$x-y=(s+3^n)-(r+3^n)=s-r\leqslant\frac{3^n-1}{2}-1<3^n$.

所以 x﹣y∉T’，且 x﹣y=s﹣r∉T．所以 x﹣y∉T∪T’．

③若 y∈T，x=s+3^n∈T’，s∈T，

则$x-y=(s+3^n)-y=(s-y)+3^n\geqslant(1-\frac{3^n-1}{2})+3^n=\frac{3^n+3}{2}>\frac{3^n-1}{2}$，

所以 x﹣y∉T．

又因为 y∈T，s∈T，所以 s﹣y∉T．所以 x﹣y=（s+3^n）﹣y=（s﹣y）+3^n∉T’．

所以 x﹣y∉T∪T’．

综上，对于∀x，y∈T∪T’，x＞y，都有 x﹣y∉T∪T’．

（Ⅲ）用数学归纳法证明．

（1）由（Ⅰ）可知当 n=2 时，命题成立，即集合 S 具有性质 P．

（2）假设 n=k（k≥2）时，命题成立．即$S=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \frac{3^k-1}{2}\}=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k$，

且 $S_i\cap S_j=\varnothing$（1≤i，j≤n，i≠j），∀x，y∈S_i（i=1，2，…，k），x＞y，都有 x﹣y∉S_i．

那么当 n=k+1 时，记$S'_i=\{s+3^k\mid s\in S_i\}$，i=1，2，…k，

并构造如下 k+1 个集合：S’’$_1$=S_1∪S’$_1$，S’’$_2$=S_2∪S’$_2$，…，S’’$_k$=S_k∪S’$_k$$\frac{3^k-1}{2}+r,\ \frac{3^k-1}{2}+s\in S''_{k+1}$，$S''_{k+1}=\{\frac{3^k-1}{2}+1,\ \frac{3^k-1}{2}+2,\ \cdots,\ 2\times\frac{3^k-1}{2}+1\}$，

显然 S’’$_i$∩S’’$_j$=∅（i≠j）．

又因为$\frac{3^{k+1}-1}{2}=3\times\frac{3^k-1}{2}+1$，所以$S''_1\cup S''_2\cup\cdots S''_k\cup S''_{k+1}=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \frac{3^{k+1}-1}{2}\}$．

下面证明 S_i'' 中任意两个元素之差不等于 S_i'' 中的任一元素（i=1，2，…，k+1）．

①若两个元素，$1\leqslant r<s\leqslant\frac{3^k-1}{2}+1$，

则 $(\frac{3^k-1}{2}+s)-(\frac{3^k-1}{2}+r)=s-r\leqslant\frac{3^k-1}{2}$，

所以 $(\frac{3^k-1}{2}+s)-(\frac{3^k-1}{2}+r)\notin S''_{k+1}$．

②若两个元素都属于 S’’$_i$=S_i∪S’$_i$（1≤i≤k），

由（Ⅱ）可知，S’’$_i$ 中任意两个元素之差不等于 S’’$_i$ 中的任一数（i=1，2，…，k+1）．

从而，n=k+1 时命题成立．

综上所述，对任意正整数 n≥2，集合 S 具有性质 P．