2016 北京丰台高三二模

数　　学（文）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．（5 分）复数 i（1－i）=（　　）

A．1+i　B．－1－i　C．1－i D．－1+i

2．（5 分）过点（2，0）且圆心为（1，0）的圆的方程是（　　）

A．$x^2+y^2+2x=0$　B．$x^2+y^2-2x=0$ C．$x^2+y^2-4x=0$ D．$x^2+y^2+4x=0$

3．（5 分）在不等式组$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$表示的平面区域内任取一个点 P（x，y），使得 x+y≤1 的概率为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　B．$\frac{1}{4}$　C．$\frac{1}{8}$　D．$\frac{1}{12}$

4．（5 分）已知点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上，它到抛物线焦点的距离为 5，那么点 P 的坐标为（　　）

A．（4，4），（4，－4）　B．（－4，4），（－4，－4）　C．（5，$2\sqrt{5}$），（5，$-2\sqrt{5}$）　D．（－5，$2\sqrt{5}$），（－5，$-2\sqrt{5}$）

5．（5 分）已知函数 f（x）的定义域为 R，则“f（x）是奇函数”是“f（1）=－f（－1）”的（　　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

6．（5 分）将函数 f（x）=sin2x 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位后与函数 g（x）的图象重合，则函数 g（x）为（　　）

A．$\sin(2x-\frac{\pi}{6})$　B．$\sin(2x+\frac{\pi}{6})$　C．$\sin(2x-\frac{\pi}{3})$　D．$\sin(2x+\frac{\pi}{3})$

7．（5 分）已知 $a=\log_2 3$，$b=\log_3 2$，$c=\log_{0.5} 2$，那么（　　）

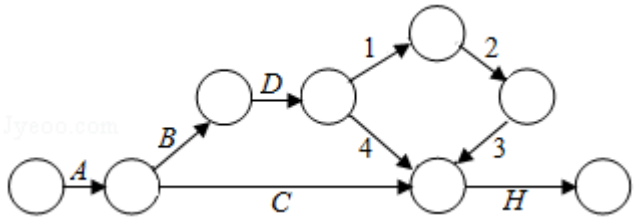
A．a＜b＜c B．a＜c＜b C．c＜b＜a D．b＜c＜a

8．（5 分）如表为某设备维修的工序明细表，其中“紧后工序”是指一个工序完成之后必须进行的下一个工序．

工序代号	工序名称或内容	紧后工序
A	拆卸	B，C
B	清洗	D
C	电器检修与安装	H
D	检查零件	E，G

E	部件维修或更换	F
F	部件配合试验	G
G	部件组装	H
H	装配与试车	

将这个设备维修的工序明细表绘制成工序网络图，如图，那么图中的 1，2，3，4 表示的工序代号依次为（　　）



A．E，F，G，G B．E，G，F，G C．G，E，F，F D．G，F，E，F

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

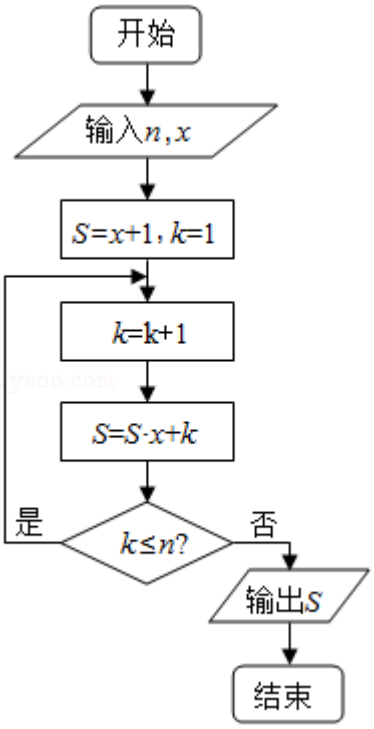
9．（5 分）已知向量$\vec{a}$=（1，2），$\vec{b}$=（1，﹣3），则$|\vec{a}+2\vec{b}|$=_____．

10．（5 分）已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$（a＞0）的一条渐近线方程为$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，则 a=_____．

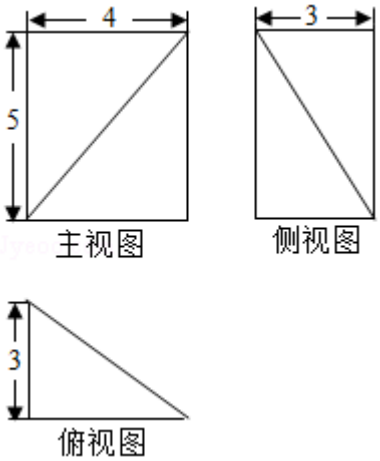
11．（5 分）某产品广告费用 x 与销售额 y（单位：万元）的统计数据如表，根据如表得到回归方程$\hat{y}$=10.6x+a，则 a=_____．

广告费用 x	4	2	3	5
销售额 y（万元）	49	26	39	58

12．（5 分）当 n=3，x=2 时，执行如图所示的程序框图，则输出的结果为_____．



13.（5 分）一个三棱柱被一个平面截去一部分，剩下的几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积为_____.



14.（5 分）某旅行达人准备一次旅行，考虑携带 A，B，C 三类用品，这三类用品每件重量依次为 1kg，2kg，3kg，每件用品对于旅行的重要性赋值依次为 2，2，4，设每类用品的可能携带的数量依次为 x_1，x_2，x_3（$x_i\geq 1$，i=1，2，3），且携带这三类用品的总重量不得超过 11kg．当携带这三类用品的重要性指数 $2x_1+2x_2+4x_3$ 最大时，则 x_1，x_2，x_3 的值分别为_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（13 分）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，且满足 $c\sin A=\sqrt{3}a\cos C$.

（Ⅰ）求角 C 的大小；

（Ⅱ）若 $b=2\sqrt{3}$，c=5，求 a 的值.

16.（13 分）某校举办的数学与物理竞赛活动中，某班有 36 名同学，参加的情况如表：（单位：人）

	参加物理竞赛	未参加物理竞赛
参加数学竞赛	9	4
未参加数学竞赛	3	20

（Ⅰ）从该班随机选 1 名同学，求该同学至少参加上述一科竞赛的概率；

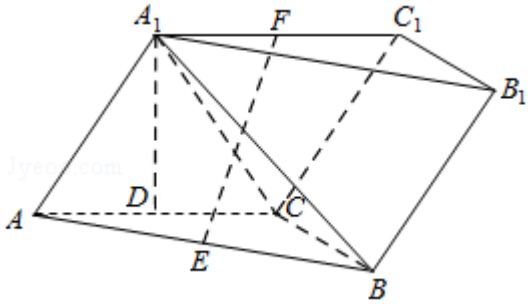
（Ⅱ）在既参加数学竞赛又参加物理竞赛的 9 名同学中，有 5 名男同学 a，b，c，d，e 和 4 名女同学甲、乙、丙、丁．现从这 5 名男同学和 4 名女同学中各随机选 1 人，求 a 被选中且甲未被选中的概率．

17.（14 分）如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，侧面 $AA_1C_1C\perp$ 底面 ABC，$AA_1=A_1C=AC=2$，$BC=1$，且 $AC\perp BC$，点 D，E，F 分别为 AC，AB，A_1C_1 的中点．

（Ⅰ）求证：$A_1D\perp$ 平面 ABC；

（Ⅱ）求证：EF∥平面 BB_1C_1C；

（Ⅲ）写出四棱锥 $A_1-BB_1C_1C$ 的体积．（只写出结论，不需要说明理由）



18.（13 分）已知$\{a_n\}$是各项为正数的等比数列，$a_1+a_2=20$，$a_3=64$，数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，$b_n=\log_2 a_n$．

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求证：对任意的 $n\in N^*$，数列$\{\frac{S_n}{a_n}\}$为递减数列．

19.（13 分）设函数 $f(x)=e^x-a(x-1)$．

（Ⅰ）求函数 f（x）的单调区间和极值；

（Ⅱ）若函数 f（x）在区间（0，2]上存在唯一零点，求 a 的取值范围．

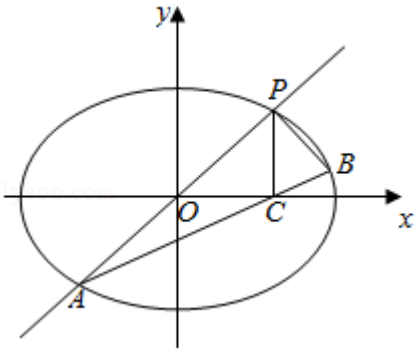
20.（14 分）已知椭圆 w：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）过点（0，$\sqrt{2}$），椭圆 w 上任意一点到两焦点的距离之和为 4．

（Ⅰ）求椭圆 w 的方程；

（Ⅱ）如图，设直线 l：$y=kx$（$k\neq0$）与椭圆 w 交于 P，A 两点，过点 P（x_0，y_0）作 $PC\perp x$ 轴，垂足为点 C，直线 AC 交椭圆 w 于另一点 B．

①用直线 l 的斜率 k 表示直线 AC 的斜率；

②写出∠APB 的大小，并证明你的结论.



参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】i（1﹣i）=﹣i^2+i=1+i，

故选：A．

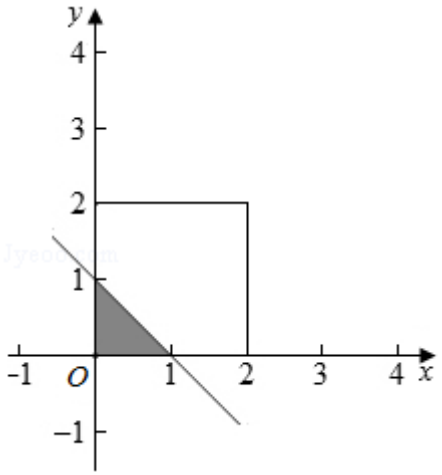
2.【解答】圆的半径为$\sqrt{(2-1)^2+(0-0)^2}$=1，故圆的方程为（x﹣1）^{2}+y^2=1，即 x^2+y^2﹣2x=0，

故选：B．

3.【解答】不等式组组$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$，得 x+y≤1 概率为阴影部分的面积，

则 P=$\frac{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1}{2\times 2}=\frac{1}{8}$，

故答案选：C．



4.【解答】根据抛物线方程 y^2=4x 可求得焦点坐标为（1，0），准线方程为 x=﹣1，

根据抛物线定义，

∴x_p+1=5，

解得 x_p=4，代入抛物线方程 y^2=4x 求得 y=±4

∴p 点坐标是（4，±4）

故选：A．

5.【解答】f（x）是奇函数⇒f（1）=﹣f（﹣1），反之不一定成立，取 f（x）=$\begin{cases}0, & x=\pm 1\\ x^2, & x\neq\pm 1\end{cases}$.

∴“f（x）是奇函数”是“f（1）=﹣f（﹣1）”的充分不必要条件，

故选：A.

6.【解答】将函数 y=sin2x 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位后所得到的函数图象对应的解析式为：y=sin[2（x+$\frac{\pi}{6}$）]=sin（2x+$\frac{\pi}{3}$）.

则函数 g（x）为：y=3sin（2x+$\frac{\pi}{3}$）.

故选：D.

7.【解答】a=$\log_2 3$＞1，b=$\log_3 2$∈（0，1），c=$\log_{0.5} 2$＜0，

可得 c＜b＜a.

故选：C.

8.【解答】由设备维修的工序明细表知：D 后可以是 E，G；因为 G 后是 H，所以 4 是 G，1 是 E.

因为 E 后是 F，所以 2 是 F，3 是 G.

故图中的 1，2，3，4 表示的工序代号依次为：E，F，G，G

故选：A.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】∵$\vec{a}$=（1，2），$\vec{b}$=（1，﹣3），

∴$\vec{a}+2\vec{b}$=（1+2，2﹣6）=（3，﹣4），

∴$|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

故答案为：5.

10.【解答】∵双曲线$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$（a＞0）的一条渐近线方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

∴$\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

∴a=$\sqrt{3}$　故答案为：$\sqrt{3}$

11．【解答】$\overline{x}=\frac{4+2+3+5}{4}=3.5$，$\overline{y}=\frac{49+26+39+58}{4}=43$．

∴43=10.6×3.5+a，解得 a=5.9．

故答案为：5.9．

12．【解答】模拟程序框图的运行过程，得

n=3，x=2

S=3，k=1

执行循环体，k=2，S=8

满足条件 k≤3，执行循环体，k=3，S=19

满足条件 k≤3，执行循环体，k=4，S=42

不满足条件 k≤3，退出循环，输出 S 的值为 42．

故答案为：42．

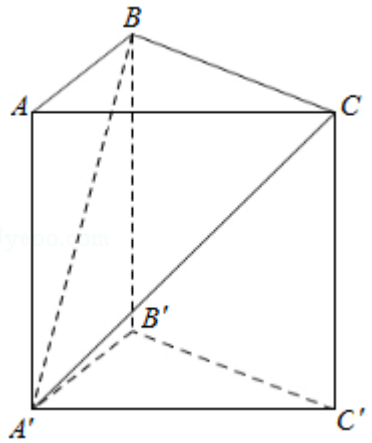
13．【解答】由三视图可知几何体为直三棱柱 ABC－A′B′C′截去三棱锥 A－A′BC 剩余的几何体，如图所示．

根据三视图可知 AB⊥AC，AB=3，AC=4，AA′=5．

∴$V_{ABC-A'B'C'}=\frac{1}{2}\times3\times4\times5=30$．$V_{A-A'BC}=V_{A'-ABC}=\frac{1}{3}V_{\text{棱柱 }ABC-A'B'C'}=10$．

∴剩余几何体的体积 $V=\frac{2}{3}V_{\text{棱柱 }ABC-A'B'C'}=20$．

故答案为 20．



14．【解答】根据题意有：$x_1+2x_2+3x_3\leqslant11$，

当 x_1，x_2，x_3 的值分别为：1，2，2 时，$2x_1+2x_2+4x_3=14$；

当 x_1，x_2，x_3 的值分别为：3，1，2 时，$2x_1+2x_2+4x_3=16$；

当 x_1，x_2，x_3 的值分别为：2，3，1 时，$2x_1+2x_2+4x_3=14$；

当 x_1，x_2，x_3 的值分别为：4，2，1 时，$2x_1+2x_2+4x_3=16$；

当 x_1，x_2，x_3 的值分别为：6，1，1 时，$2x_1+2x_2+4x_3=18$，

综上可得：当 x_1，x_2，x_3 的值分别为：6，1，1 时，三类用品的重要性指数最大．

故答案为：6，1，1．

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．【解答】（Ⅰ）∵$c\sin A=\sqrt{3}a\cos C$．

由正弦定理得 $\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin A\cos C$，

化简得 $\tan C=\sqrt{3}$（∵$\sin A\neq 0$，$\cos C\neq 0$），

∵$0°<C<180°$，∴$C=60°$．

（Ⅱ）由余弦定理得 $25=a^2+(2\sqrt{3})^2-\frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}a\cos 60^0$，

化简得 $a^2-2\sqrt{3}a-13=0$，

解得 $a=\sqrt{3}+4$，或 $a=\sqrt{3}-4$，

所求 a 的值为 $\sqrt{3}+4$．

16．【解答】（Ⅰ）设“一名同学至少参加上述一科竞赛”为事件 A，－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（2 分）

由表可知，既参加数学竞赛又参加物理竞赛的同学有 9 人；只参加数学竞赛的同学有 4 人，只参加物理竞赛的同学有 3 人，因此至少参加一科竞赛的同学有 16 人．－－－－－－－－－－（4 分）

则 $P(A)=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}$．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（6 分）

（Ⅱ）设“a 被选中且甲未被选中”为事件 B，－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（7 分）

从 5 名男同学 a，b，c，d，e 和 4 名女同学甲、乙、丙、丁中各随机选 1 人，所有的选取情况有：

（a，甲），（a，乙），（a，丙），（a，丁），

（b，甲），（b，乙），（b，丙），（b，丁），

（c，甲），（c，乙），（c，丙），（c，丁），

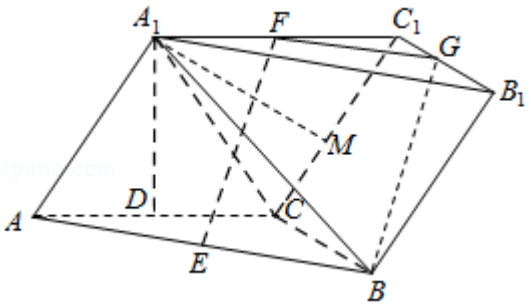
（d，甲），（d，乙），（d，丙），（d，丁），

（e，甲），（e，乙），（e，丙），（e，丁）.

共计 20 种．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（11 分）

其中 a 被选中且甲未被选中的情况有：

（a，乙），（a，丙），（a，丁），共计 3 种．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－



18.【解答】（Ⅰ）设等比数列{a_n}的公比为 q，

则 $\begin{cases} a_1+a_1q=20 \\ a_1q^2=64 \end{cases}$，

解得 q=4 或 $q=\frac{4}{5}$（舍去），$a_1=4$；

故 $a_n=4\times4^{n-1}=4^n$.

（Ⅱ）证明：∵ $b_n=\log_2a_n=\log_2(4^n)=2n$，

∴{b_n}是以 $b_1=2$ 为首项，以 2 为公差的等差数列.

∴ $S_n=\frac{2+2n}{2}\times n=n^2+n$，$\frac{S_n}{a_n}=\frac{n^2+n}{4^n}$；

∵ $\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=\frac{(n+1)^2+(n+1)}{4^{n+1}}-\frac{n^2+n}{4^n}$

$=\frac{1}{4^{n+1}}[(n+1)^2+(n+1)-4(n^2+n)]$

$=\frac{1}{4^{n+1}}(-3n^2-n+2)$；

∵ $\frac{-(3n-2)(n+1)}{4^{n+1}}<0$，

∴ $\frac{1}{4^{n+1}}(-3n^2-n+2)<0$，

∴数列 $\{\frac{S_n}{a_n}\}$为递减数列.

19.【解答】（Ⅰ）f′（x）=e^x - a，- （1 分）

（1）若 a≤0，则在区间（ - ∞，+∞）上 f′（x）＞0，f（x）单调递增．所以当 a≤0 时，f（x）的单调递增区间为（ - ∞，+∞），没有极值点． - （3 分）

（2）若 a＞0，令 f′（x）=0，即 e^x=a，解得 x=lna，- （4 分）

因为函数 $f'(x)=e^x-a$ 在区间（－∞，+∞）是递增函数，

所以在区间（－∞，lna）内 $f'(x)<0$，f（x）单调递减；在区间（lna，+∞）内 $f'(x)>0$，f（x）单调递增．

所以当 $a>0$ 时，f（x）的单调递减区间为（－∞，lna），f（x）的单调递增区间为（lna，+∞）所以当 $x=\ln a$ 时，函数 f（x）有极小值为 $2a-a\ln a$．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（6 分）

（Ⅱ）（1）当 $a\leqslant 0$ 时，由（Ⅰ）可知，f（x）在（－∞，+∞）上单调递增，

因为 $f(0)=1+a$，$f(1)=e>0$，－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（8 分）

令 $f(0)=1+a<0$，得 $a<-1$．

所以当 $a<-1$ 时，f（x）在区间上（0，2]上存在唯一零点．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（9 分）

（2）当 $a>0$ 时，由（Ⅰ）可知，$x=\ln a$ 为函数 f（x）的最小值点

因为 $f(0)=1+a>0$，若函数 f（x）在区间上（0，2]上存在唯一零点，则只能是：

①$\begin{cases}f(\ln a)=0\\0<\ln a\leqslant 2\end{cases}$，或②$\begin{cases}f(2)\leqslant 0\\\ln a>2\end{cases}$．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（11 分）

由①得 $a=e^2$；由②得 $a>e^2$．

综上所述，函数 f（x）在区间上（0，2]上存在唯一零点，

则 $a<-1$ 或 $a\geqslant e^2$．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（13 分）

20．【解答】（Ⅰ）由题意椭圆 w：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）过点（0，$\sqrt{2}$），可得：$b=2$，

∵$2a=4$，∴$a=2$，$b=\sqrt{2}$，－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（2 分）

椭圆 w 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（4 分）

（Ⅱ）①设 P（x_0，y_0），则 A（$-x_0$，$-y_0$），C（x_0，0），$k=\frac{y_0}{x_0}$．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（6 分）

直线 AB 的斜率 $k_1=\frac{0-(-y_0)}{x_0-(-x_0)}=\frac{y_0}{2x_0}=\frac{k}{2}$．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（7 分）

②∠APB=90°－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（8 分）

由①可得直线 AB 的方程：$y=\frac{k}{2}(x-x_0)$，设点 B（x_1，y_1

联立$\begin{cases} y=\frac{k}{2}(x-x_0) \\ x^2+2y^2=4 \end{cases}$，

消去 y 得 $(2+k^2)x^2-2k^2x_0x+k^2x_0^2-8=0$ - - - - - - - - - - - - - - - （10 分）

则 $-x_0+x_1=\frac{2k^2x_0}{2+k^2}$，解得 $x_1=\frac{3k^2x_0+2x_0}{2+k^2}$， - - - - - - - - - - - - - - （12 分）

所以 $y_1=\frac{k^3x_0}{2+k^2}$，点 $B(\frac{3k^2x_0+2x_0}{2+k^2}, \frac{k^3x_0}{2+k^2})$. - - - - - - - - - - - - - - （13 分）

因为 $k_{PB}=\frac{\frac{k^3x_0}{2+k^2}-kx_0}{\frac{3k^2x_0+2x_0}{2+k^2}-x_0}=\frac{-2kx_0}{2k^2x_0}=-\frac{1}{k}$,

所以 $k_{AP}\bullet k_{PB}=-1$，所以∠APB=90° - （14 分）

