2016 北京东城高三二模

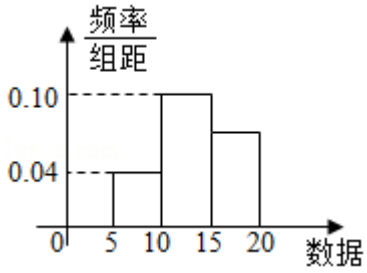
数　　学（文）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1．（5 分）已知集合 A={x∈N|x≤4}，B={x∈N|x＞2}，那么 A∩B=（　　）

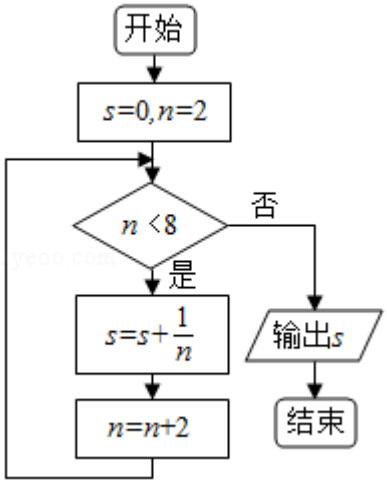
A．{3，4}　B．{0，1，2，3，4}　C．N　D．R

2．（5 分）如图，根据样本的频率分布直方图，估计样本的中位数是（　　）



A．10　B．12　C．13　D．16

3．（5 分）执行如图所示程序框图，则输出的结果是（　　）



A．$\frac{1}{6}$　B．$\frac{3}{4}$　C．$\frac{9}{10}$　D．$\frac{11}{12}$

4．（5 分）已知 A，B 为圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 上关于点 P（1，2）对称的两点，则直线 AB 的方程为（　　）

A．x+y－3=0　B．x－y+3=0　C．x+3y－7=0　D．3x－y－1=0

5．（5 分）若 a、b 为实数，则“ab＜1”是“$0<a<\frac{1}{b}$”的（　　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充分条件　D．既不充分也不必要条件

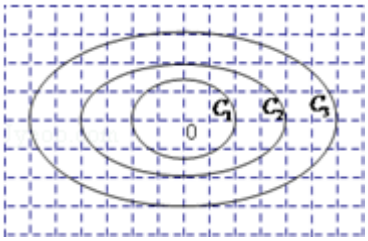
6．（5 分）已知函数 g（x）=f（x）－x 是偶函数，且 f（3）=4，则 f（－3）=（　　）

A．－4　B．－2　C．0　D．4

7．（5 分）已知向量 $\overrightarrow{OA}$=（cosβ，sinβ），将向量 $\overrightarrow{OA}$绕坐标原点 O 逆时针旋转 θ 角得到向量 $\overrightarrow{OB}$（0＜θ＜90°），则下列说法不正确的是（　　）

A．$|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$ B．$|\overrightarrow{AB}|<\sqrt{2}$ C．$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$ D．$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})\perp(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

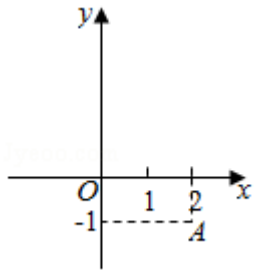
8．（5 分）如图，边长为 a 的正方形组成的网格中，设椭圆 C_1、C_2、C_3 的离心率分别为 e_1、e_2、e_3，则（　　）



A．$e_1=e_2<e_3$ B．$e_2=e_3<e_1$ C．$e_1=e_2>e_3$ D．$e_2=e_3>e_1$

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

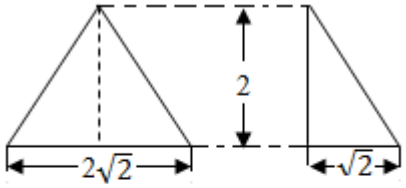
9．（5 分）如图所示，在复平面内，点 A 对应的复数为 z，则复数 z=_____．



10．（5 分）若函数 y=a+sinx 在区间[π，2π]上有且只有一个零点，则 a=_____．

11．（5 分）已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$（b＞0）的虚轴长是实轴长的 2 倍，则实数 b=_____．

12．（5 分）已知一个三棱锥的三视图如图所示，其中俯视图是等腰直角三角形，则该三棱锥的四个面中，最大面积为_____．



正（主）视图　　侧（左）视图



俯视图

13.（5 分）已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_2=-2$，且 $a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，$n\in N^*$，则 $a_5=$_____；数列$\{a_n\}$的前 2016 项和为_____.

14.（5 分）一名顾客计划到某商场购物，他有三张商场的优惠券，商场规定每购买一件商品只能使用一张优惠券．根据购买商品的标价，三张优惠券的优惠方式不同，具体如下：

优惠券 A：若商品标价超过 50 元，则付款时减免标价的 10%；

优惠券 B：若商品标价超过 100 元，则付款时减免 20 元；

优惠券 C：若商品标价超过 100 元，则付款时减免超过 100 元部分的 18%.

某顾客想购买一件标价为 150 元的商品，若想减免钱款最多，则应该使用_____优惠券（填 A，B，C）；若顾客想使用优惠券 C，并希望比优惠券 A 和 B 减免的钱款都多，则他购买的商品的标价应高于_____元.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（13 分）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别是 a，b，c，且 $a^2=3bc$.

（Ⅰ）若 sinA=sinC，求 cosA；

（Ⅱ）若 $A=\frac{\pi}{4}$，且 a=3，求△ABC 的面积.

16.（13 分）已知等差数列$\{a_n\}$满足 $a_3=7$，$a_5+a_7=26$，其前 n 项和为 S_n.

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式及 S_n；

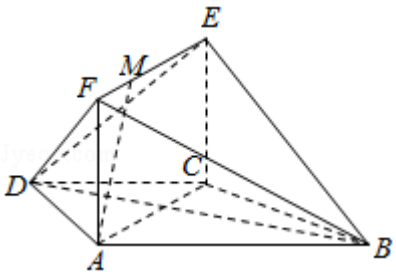
（Ⅱ）令 $b_n=\frac{1}{S_n-n}$（$n\in N^*$），求数列$\{b_n\}$的前 8 项和.

17.（14 分）在梯形 ABCD 中，AB∥CD，AD=DC=CB=a，∠ABC=60°．平面 ACEF⊥平面 ABCD，四边形 ACEF 是矩形，AF=a，点 M 在线段 EF 上.

（Ⅰ）求证：BC⊥AM；

（Ⅱ）试问当 AM 为何值时，AM∥平面 BDE？证明你的结论.

（Ⅲ）求三棱锥 A－BFD 的体积.



18.（13 分）某出租车公司响应国家节能减排的号召，已陆续购买了 140 辆纯电动汽车作为运营车辆．目前我国主流纯电动汽车按续航里程数 R（单位：公里）分为 3 类，即 A 类：80≤R＜150，B 类：

150≤R＜250，C 类：R≥250．该公司对这 140 辆车的行驶总里程进行统计，结果如表：

类型	A 类	B 类	C 类
已行驶总里程不超过 10 万公里的车辆数	10	40	30
已行驶总里程超过 10 万公里的车辆数	20	20	20

（Ⅰ）从这 140 辆汽车中任取一辆，求该车行驶总里程超过 10 万公里的概率；

（Ⅱ）公司为了了解这些车的工作状况，决定抽取 14 辆车进行车况分析，按表中描述的六种情况进行分层抽样，设从 C 类车中抽取了 n 辆车．

（ⅰ）求 n 的值；

（ⅱ）如果从这 n 辆车中随机选取两辆车，求恰有一辆车行驶总里程超过 10 万公里的概率．

19．（13 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）与 y 轴交于 B_1，B_2 两点，F_1 为椭圆 C 的左焦点，且△$F_1B_1B_2$ 是边长为 2 的等边三角形．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）设直线 x=my+1 与椭圆 C 交于 P，Q 两点，点 P 关于 x 轴的对称点为 P_1（P_1 与 Q 不重合），则直线 P_1Q 与 x 轴是否交于一个定点？若是，请写出定点坐标，并证明你的结论；若不是，请说明理由．

20．（14 分）设函数 f（x）=$\frac{a}{x}$﹣x，a∈R．

（Ⅰ）若 a=﹣1，求 f（x）在区间[$\frac{1}{2}$，3]上的最大值；

（Ⅱ）设 b≠0，求证：当 a=﹣1 时，过点 P（b，﹣b）有且只有一条直线与曲线 y=f（x）相切；

（Ⅲ）若对任意的 x∈[$\frac{1}{2}$，2]，均有 f（x）|x﹣1|≤1 成立，求 a 的取值范围．

参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1．【解答】∵A={x∈N|x≤4}，B={x∈N|x＞2}，

∴A∩B={x∈N|2＜x≤4}={3，4}，

故选：A．

2．【解答】由样本的频率分布直方图，得：

[5，10）区间内的频率为 0.04×5=0.2，

[10，15）区间内的频率为 0.1×5=0.5，

∴估计样本的中位数为：$10+\frac{0.5-0.2}{0.5}\times 5=13$．

故选：C．

3．【解答】模拟执行程序，可得

s=0，n=2

满足条件 n＜8，执行循环体，s=$\frac{1}{2}$，n=4

满足条件 n＜8，执行循环体，s=$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$，n=6

满足条件 n＜8，执行循环体，s=$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$，n=8

不满足条件 n＜8，退出循环，输出 s=$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$．

故选：D．

4．【解答】由题意，圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 的圆心坐标为 C（0，1），

∵圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 上存在 A，B 两点关于点 P（1，2）成中心对称，

∴CP⊥AB，P 为 AB 的中点，

∵$k_{CP}=\frac{2-1}{1-0}=1$，∴$k_{AB}=-1$，

∴直线 AB 的方程为 y－2=－（x－1），即 x+y－3=0．

故选：A．

5.【解答】若 a、b 为实数，ab＜1，

令 a=﹣1，b=1，ab=﹣1＜1，

推不出 $0<a<\frac{1}{b}$，

若 $0<a<\frac{1}{b}$，可得 b＞0，

∴0＜ab＜1，⇒ab＜1，

∴ab＜1”是“$0<a<\frac{1}{b}$必要不充分条件，

故选 B.

6.【解答】函数 g（x）=f（x）﹣x 是偶函数，

可知 g（3）=g（﹣3），

可得 f（3）﹣3=f（﹣3）+3，

即 4﹣3=f（﹣3）+3，

f（﹣3）=﹣2.

故选：B.

7.【解答】以 OA，OB 为邻边作平行四边形 OACB 则 AB=$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，

∵OA+OB＞AB，∴$|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|>|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，故 A 正确.

∵OA=OB=1，∠AOB＜90°，

∴AB=$\sqrt{OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\angle AOB}=\sqrt{2-2\cos\angle AOB}<\sqrt{2}$，故 B 正确.

∵$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|^2=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，$|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|^2=\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$，

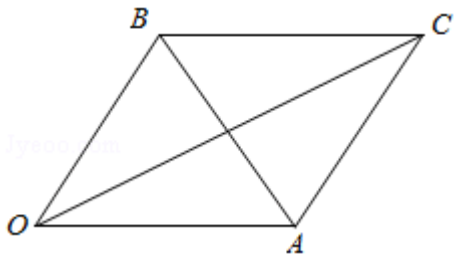
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\neq 0$，

∴$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|\neq|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$．故 C 错误.

∵OA=OB，∴四边形 ABCD 是菱形，

∴OC⊥AB，即（$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$）⊥（$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$），故 D 正确.

故选：C.



8.【解答】由图形可知，椭圆 C_1 的长半轴长为 2a，短半轴长为 1.5a，则 $e_1=\frac{\sqrt{4a^2-\frac{9}{4}a^2}}{2a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

椭圆 C_2 的长半轴长为 4a，短半轴长为 2a，则 $e_2=\frac{\sqrt{16a^2-4a^2}}{4a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

椭圆 C_3 的长半轴长为 6a，短半轴长为 3a，则 $e_2=\frac{\sqrt{36a^2-9a^2}}{6a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

∴$e_2=e_3>e_1$，

故选 D.

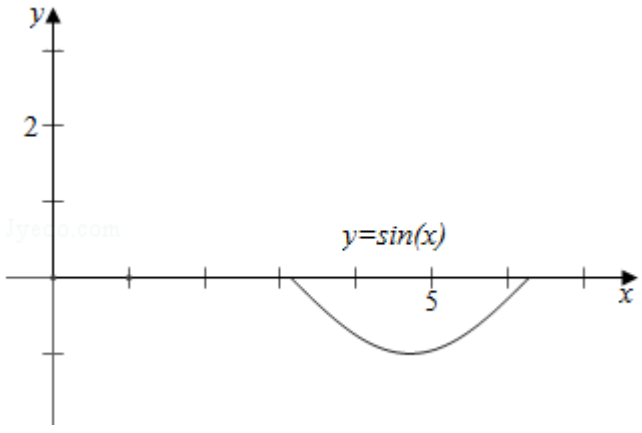
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】由图可知：点 A 对应的点为（2，﹣1），

∴z=2﹣i.

故答案为：2﹣i.

10.【解答】作函数 y=sinx 在区间[π，2π]上的图象如下，



，

结合图象可知，

若函数 y=a+sinx 在区间[π，2π]上有且只有一个零点，

则 a﹣1=0，

故 a=1；

故答案为：1．

11．【解答】双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$（b＞0）的虚轴长是 2b，实轴长：2，

虚轴长是实轴长的 2 倍，可得 2b=4，

解得 b=2．

故答案为：2．

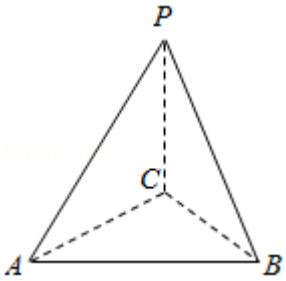
12．【解答】由三视图可知：该几何体为如图所示的三棱锥其中底面 ABC 是等腰直角三角形，PC⊥底面 ABC．

∴该三棱锥的四个面中，最大面积为侧面△PAB．

∴其面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2^2+(\sqrt{2})^2}$

$=2\sqrt{3}$．

故答案为：$2\sqrt{3}$



13．【解答】∵$a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，

∴$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$，

∵$a_1=1$，$a_2=-2$，

∴$a_3=a_2-a_1=-3$，

$a_4=a_3-a_2=-3+2=-1$，

$a_5=a_4-a_3=-1+3=2$，

$a_6=a_5-a_4=2+1=3$，

$a_7=a_6-a_5=3-2=1$，

$a_8=a_7-a_6=1-3=-2$，

∴$a_{n+6}=a_n$．

则 $S_{2016}=336（a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6）=336\times（1-2-3-1+2+3）=0$，

故答案为：2，0．

14.【解答】标价为150元的商品，使用优惠券A，付款时减免15元；使用优惠券B，付款时减免20元；使用优惠券C，付款时减免9元，故想减免钱款最多，则应该使用优惠券B.

设标价为x元，则（x﹣100）×18%＞x×10%且（x﹣100）×18%＞20，∴x＞225，即他购买的商品的标价应高于225元.

故答案为：B；225.

三、解答题共6小题，共80分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.【解答】（Ⅰ）在△ABC中，由sinA=sinC，利用正弦定理可得a=c.

又$a^2=3bc$，

所以：c=3b.

所以：由余弦定理可得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+9b^2-9b^2}{2b\times 3b}=\frac{1}{6}$.　…6分

（Ⅱ）由已知$a^2=3bc$，且a=3，

所以bc=3.

故△ABC的面积$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{3}{4}\sqrt{2}$.　…13分

16.【解答】（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由$a_5+a_7=26$，得$a_6=13$，又$a_6-a_3=3d=6$，解得d=2.

∴$a_n=a_3+(n-3)d=7+2(n-3)=2n+1$.

∴以$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\times n=\frac{3+2n+1}{2}\times n=n^2+2n$.

（Ⅱ）由$b_n=\frac{1}{S_n-n}$，得$b_n=\frac{1}{n^2+n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

设$\{b_n\}$的前n项和为T_n，则$T_8=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{8}-\frac{1}{9})=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$.

故数列$\{b_n\}$的前8项和为$\frac{8}{9}$.

17.【解答】（Ⅰ）证明：由题意知，梯形ABCD为等腰梯形，且AB=2a，$AC=\sqrt{3}a$，

由$AB^2+BC^2=AC^2$，可知AC⊥BC.

又平面ACEF⊥平面ABCD，且平面ACEF∩平面ABCD=AC，BC⊂平面ABCD，

所以BC⊥平面ACEF.

又AM⊂平面ACEF，所以BC⊥AM．…5分

（Ⅱ）解：当$AM=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$时，AM∥平面BDE.

证明如下：当$AM=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$，可得$FM=\frac{\sqrt{3}}{3}a$，故$EM=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$

在梯形 ABCD 中，设 AC∩BD=N，连结 EN，由已知可得 CN：NA=1：2，所以 $AN=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$．所以 EM=AN．

又 EM∥AN，所以四边形 ANEM 为平行四边形．

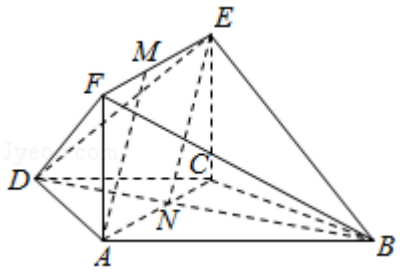
所以 AM∥NE．

又 NE⊂平面 BDE，AM⊄平面 BDE，所以 AM∥ 平面 BDE．

当 $AM=\frac{2}{3}\sqrt{3}a$ 时， AM∥ 平面 BDE．…11 分

（Ⅲ）解：由已知可得△ABD 的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$，

故 $V_{A-BFD}=V_{F-ABD}=\frac{1}{3}\times AF\times S_{\triangle ABD}=\frac{1}{3}\times a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a^2=\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$．…14 分



18．【解答】（Ⅰ）从这 140 辆汽车中任取一辆，则该车行驶总里程超过 10 万公里的概率为 $P_1=\frac{20+20+20}{140}=\frac{3}{7}$．

（Ⅱ）（ⅰ）依题意 $n=\frac{30+20}{140}\times 14=5$．

（ⅱ）5 辆车中已行驶总里程不超过 10 万公里的车有 3 辆，记为 a，b，c； 5 辆车中已行驶总里程超过 10 万公里的车有 2 辆，记为 m，n．

“从 5 辆车中随机选取两辆车”的所有选法共 10 种：ab，ac，am，an，bc，bm，bn，cm，cn，mn．

从 5 辆车中随机选取两辆车，恰有一辆车行驶里程超过 10 万公里”的选法共 6 种：am，an，bm，bn，cm，cn．

则选取两辆车中恰有一辆车行驶里程超过 10 万公里的概率 $P_2=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$．

19．【解答】（1）由题意可得 B_1（0，b），B_2（0，﹣b），F_1（﹣c，0），

$|F_1B_1|=\sqrt{c^2+b^2}=a$，

由△$F_1B_1B_2$ 是边长为 2 的等边三角形，可得 a=2，

2b=2，即 b=1，

则有椭圆的方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（2）由$\begin{cases}x=my+1\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$，

得（my+1）^{2}+4y^2=4，即（m^2+4）y^2+2my﹣3=0，m≠0，

设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2）

则 P_1（x_1，﹣y_1），

且 $y_1+y_2=-\frac{2m}{4+m^2}$，$y_1y_2=-\frac{3}{4+m^2}$，

经过点 P_1（x_1，﹣y_1），Q（x_2，y_2）的直线方程为$\frac{y+y_1}{y_2+y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$，

令 y=0，则 $x=\frac{x_2-x_1}{y_2+y_1}\cdot y_1+x_1=\frac{x_1y_2+x_2y_1}{y_1+y_2}$，

又 $x_1=my_1+1$，$x_2=my_2+1$．

当 y=0 时，$x=\frac{(my_1+1)y_2+(my_2+1)y_1}{y_1+y_2}=\frac{2my_1y_2}{y_1+y_2}+1$

$=\frac{-\frac{6m}{4+m^2}}{\frac{-2m}{4+m^2}}+1=3+1=4$．

这说明，直线 P_1Q 与 x 轴交于定点（4，0）．

20．【解答】（Ⅰ）解：a=﹣1，f（x）=$\frac{-1}{x}$﹣x，f′（x）=$\frac{1}{x^2}$﹣1=$\frac{-(x+1)(x-1)}{x^2}$．

∴当$\frac{1}{2}\leqslant x<1$时，f′（x）＞0，此时函数 f（x）单调递增；当 1＜x≤3 时，f′（x）＜0，此时函数 f（x）单调递减．

∴在区间[$\frac{1}{2}$，3]上，当 x=1 时，函数 f（x）取得最大值，f（1）=﹣2．

（Ⅱ）证明：当 a=﹣1 时，f（x）=$\frac{-1}{x}$﹣x，f′（x）=$\frac{1}{x^2}$﹣1＞﹣1，

设过点 P（b，﹣b）与函数 f（x）相切于点 Q $(x_0,-\frac{1}{x_0}-x_0)$，

切线斜率$\frac{1}{x_0^2}-1=\frac{-\frac{1}{x_0}-x_0+b}{x_0-b}$，化为：$b=2x_0$．

切线方程为：$y+2x_0=(\frac{1}{x_0^2}-1)(x-2x_0)$，

与 $y=\frac{1}{x}-x$ 联立可得：化为：$x^2-2x_0x+x_0^2=0$，解得 $x=x_0$，

因此切线与曲线有且只有一个公共点 Q.

当 $x_0>0$ 时，切点 Q 位于第四象限，因此只有一条切线；

当 $x_0<0$ 时，切点 Q 位于第二象限，因此只有一条切线.

（III）当 x=1 时，∀a∈R，均有 f（x）$|x-1|\leqslant 1$ 成立．当 $x\neq 1$ 时，不等式等价于 $a\leqslant x^2+\frac{x}{|x-1|}$.

当 $x\in[\frac{1}{2},1)$ 时，f（x）$|x-1|\leqslant 1$ 等价于：$a\leqslant x^2+\frac{x}{1-x}$，令 $g(x)=x^2+\frac{x}{1-x}$，$x\in[\frac{1}{2},1)$，

$g'(x)=2x+\frac{1}{(x-1)^2}>0$，函数 g（x）在 $x\in[\frac{1}{2},1)$ 单调递增，∴当 $x=\frac{1}{2}$ 时，函数 g（x）取得最小值

$g(\frac{1}{2})=\frac{5}{4}$.

$\therefore a\leqslant\frac{5}{4}$.

当 $1<x\leqslant 2$ 时，f（x）$|x-1|\leqslant 1$ 等价于：$a\leqslant x^2+\frac{x}{x-1}$，令 $h(x)=x^2+\frac{x}{x-1}$，则 $h(x)=x^2+1+\frac{1}{x-1}>2$，

$\therefore a\leqslant\frac{5}{4}$，不等式 $a\leqslant x^2+\frac{x}{x-1}$ 对于 x∈（1，2]恒成立.

综上可得：实数 a 的求值范围是 $(-\infty,\frac{5}{4}]$.

