2015 北京西城高三二模

数　　学（文）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.（5 分）设集合 A={x|x－1＞0}，集合 B={x|x≤3}，则 A∩B=（　　）

A.（－1，3）　　B.（1，3］　C.［1，3）　D.［－1，3］

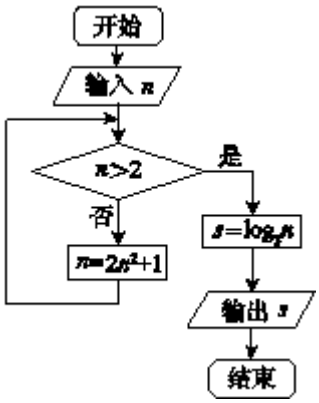
2.（5 分）已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{a}$=（－1，1），$\vec{b}$=（2，3），$\vec{c}$=（－2，k），若（$\vec{a}$+$\vec{b}$）∥$\vec{c}$，则实数 k=（　　）

A．4　　B．－4　C．8　　D．－8

3.（5 分）设命题 p：函数 f（x）=e^{x-1}在 R 上为增函数；命题 q：函数 f（x）=cos2x 为奇函数．则下列命题中真命题是（　　）

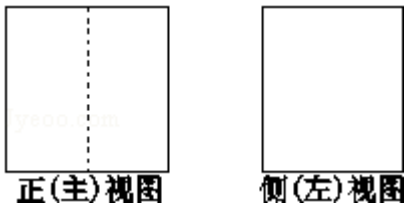
A．p∧q B.（￢p）∨q　　C.（￢p）∧（￢q）　D．p∧（￢q）

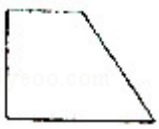
4.（5 分）执行如图所示的程序框图，若输入的 n∈{1，2，3}，则输出的 s 属于（　　）



A．{1，2}　B．{1，3}　C．{2，3}　D．{1，3，9}

5.（5 分）一个几何体的三视图中，正（主）视图和　侧（左）视图如图所示，则俯视图不可以为（　　）



A．　B．　C．　D．

6.（5 分）某生产厂商更新设备，已知在未来 x 年内，此设备所花费的各种费用总和 y（万元）与 x 满足函数关系 $y=4x^2+64$，若欲使此设备的年平均花费最低，则此设备的使用年限 x 为（　　）

A．3　　B．4　　C．5　　D．6

7.（5 分）“m＞3”是“曲线 $mx^2-(m-2)y^2=1$ 为双曲线”的（　　）

A．充分而不必要条件 B．必要而不充分条件

C．充分必要条件 D．既不充分也不必要条件

8.（5 分）在长方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 中，AB=$\sqrt{2}$，　　$BC=AA_1$=1，点 P 为对角线 AC_1 上的动点，点 Q 为底面 ABCD 上的动点（点 P，Q 可以重合），则 B_1P+PQ 的最小值为（　　）

A. $\sqrt{2}$　B. $\sqrt{3}$　C. $\frac{3}{2}$　D. 2

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.（5 分）复数$\frac{10i}{3+i}$=_____.

10.（5 分）抛物线 C：$y^2=4x$ 的准线 l 的方程是_____；以 C 的焦点为圆心，且与直线 l 相切的圆的方程是_____.

11.（5 分）设函数 f（x）=$\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>1\\ -x-2, & x\leqslant 1\end{cases}$，则 f[f（2）]=_____；函数 f（x）的值域是_____.

12.（5 分）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，若 a=$\sqrt{7}$，b=3，c=2，则 A=_____；△ABC 的面积为_____.

13.（5 分）若 x，y 满足$\begin{cases}y\geqslant x\\ y\leqslant 2x\\ x+y\leqslant 1\end{cases}$ 若 z=x+my 的最大值为$\frac{5}{3}$，则实数 m=_____.

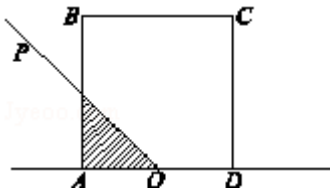
14.（5 分）如图，正方形 ABCD 的边长为 2，O 为 AD 的中点，射线 OP 从 OA 出发，绕着点 O 顺时针方向旋转至 OD，在旋转的过程中，记∠AOP 为 x（$x\in[0, \pi]$），OP 所经过的在正方形 ABCD 内的区域（阴影部分）的面积 S=f（x），那么对于函数 f（x）有以下三个结论：

①f（$\frac{\pi}{3}$）=$\frac{\sqrt{3}}{2}$；

②函数 f（x）在区间（$\frac{\pi}{2}$，π）上为减函数；

③任意$x\in[0, \frac{\pi}{2}]$，都有 f（x）+f（π－x）=4.

其中所有正确结论的序号是_____.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）已知函数 f（x）=$\frac{\cos 2x(\sin x+\cos x)}{\cos x-\sin x}$.

（Ⅰ）求函数 f（x）的定义域；

（Ⅱ）求函数 f（x）的单调增区间.

16.（13 分）设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=1$，$a_{n+1}=1+S_n$（$n\in N^*$）.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

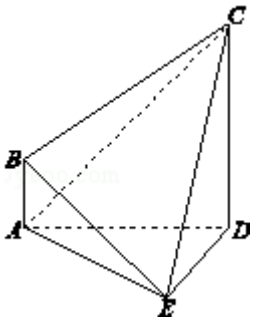
（Ⅱ）若数列{b_n}为等差数列，且 $b_1=a_1$，公差为$\frac{a_2}{a_1}$．当 $n\geq 3$ 时，比较 b_{n+1} 与 $1+b_1+b_2+\cdots+b_n$ 的大小．

17．（14 分）如图，在四棱锥 E－ABCD 中，AE⊥DE，CD⊥平面 ADE，AB⊥平面 ADE，CD=DA=6，AB=2，DE=3．

（Ⅰ）求棱锥 C－ADE 的体积；

（Ⅱ）求证：平面 ACE⊥平面 CDE；

（Ⅲ）在线段 DE 上是否存在一点 F，使 AF∥平面 BCE？若存在，求出$\frac{EF}{ED}$的值；若不存在，说明理由．



18．（13 分）某厂商调查甲、乙两种不同型号电视机在 10 个卖场的销售量（单位：台），并根据这 10 个卖场的销售情况，得到如图所示的茎叶图．为了鼓励卖场，在同型号电视机的销售中，该厂商将销售量高于数据平均数的卖场命名为该型号电视机的“星级卖场”．

（Ⅰ）求在这 10 个卖场中，甲型号电视机的“星级卖场”的个数；

（Ⅱ）若在这 10 个卖场中，乙型号电视机销售量的平均数为 26.7，求 a＞b 的概率；

（Ⅲ）若 a=1，记乙型号电视机销售量的方差为 s^2，根据茎叶图推断 b 为何值时，s^2达到最小值．（只需写出结论）

（注：方差$s^2=\frac{1}{n}[(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2]$，其中$\bar{x}$为 x_1，x_2，…，x_n的平均数）

甲		乙
4 8 0 0	1	0 8
7 5 2	2	0 2 3
0	3	1 2 *a* *b*
3 1	4	3

19．（14 分）设 F_1，F_2分别为椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左、右焦点，点 A 为椭圆 E 的左顶点，点 B 为椭圆 E 的上顶点，且|AB|=2．

（Ⅰ）若椭圆 E 的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设 P 为椭圆 E 上一点，且在第一象限内，直线 F_2P 与 y 轴相交于点 Q．若以 PQ 为直径的圆经过点 F_1，证明：点 P 在直线 x+y－2=0 上．

20．（13 分）已知函数 f（x）=$\frac{1-x}{1+ax^2}$，其中 a∈R．

（Ⅰ）当 $a=-\frac{1}{4}$ 时，求函数 f（x）的图象在点（1，f（1））处的切线方程；

（Ⅱ）当 a＞0 时，证明：存在实数 m＞0，使得对任意的 x，都有 - m≤f（x）≤m 成立；

（Ⅲ）当 a=2 时，是否存在实数 k，使得关于 x 的方程 f（x）=k（x - a）仅有负实数解？当 $a=-\frac{1}{2}$ 时的情形又如何？

（只需写出结论）

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】由 A 中不等式解得：x＞1，即 A=（1，+∞），

∵B=（﹣∞，3]，

∴A∩B=（1，3]．

故选：B．

2.【解答】∵$\vec{a}$=（﹣1，1），$\vec{b}$=（2，3），

∴$\vec{a}+\vec{b}$=（1，4），

若（$\vec{a}+\vec{b}$）∥$\vec{c}$，

则$\frac{-2}{1}=\frac{k}{4}$，即 k=﹣8，

故选：D．

3.【解答】命题 p：函数 f（x）=e^{x-1}在 R 上为增函数，正确；

命题 q：函数 f（x）=cos2x 为偶函数，因此不正确．

可知：p∧¬q 正确．

故选：D．

4.【解答】由程序框图可得，

当 n 的值为 1 时，不满足条件 n＞2，可得 n=3，满足条件 n＞2，计算并输出 s=1；

当 n 的值为 2 时，不满足条件 n＞2，可得 n=9，满足条件 n＞2，计算并输出 s=2；

当 n 的值为 3 时，满足条件 n＞2，计算并输出 s=1；

综上，输出的 s∈{1,2}．

故选：A．

5.【解答】根据题意，得；

当底面为选项 A 所示的三角形时，该几何体是直三棱柱，∴A 有可能；

当底面为选项 B 所示的直角梯形时，该几何体是直四棱柱，∴B 有可能；

当底面为选项 C 所示的直角梯形时，其正视图的中间为虚线，∴C 没有可能；

当底面为选项 D 所示的直角梯形时，该几何体是直四棱柱，∴C 有可能；

综上，俯视图不可能的是 C.

故选：C.

6.【解答】解法一，根据题意，得；

该设备所花费的年平均费用为

f（x）=$\frac{y}{x}$=$\frac{4x^2+64}{x}$=4x+$\frac{64}{x}$，其中 x＞0；

∵x＞0，∴4x+$\frac{64}{x}$≥2$\sqrt{4x\cdot\frac{64}{x}}$=32，

当且仅当 4x=$\frac{64}{x}$，即 x=4 时，取“=”；

∴当 x=4 时，该设备的年平均花费最低.

解法二，根据题意，得；

该设备所花费的年平均费用为

f（x）=$\frac{y}{x}$=$\frac{4x^2+64}{x}$，其中 x＞0；

设 t=$\frac{4x^2+64}{x}$，

∴$4x^2$－tx+64=0，

∴△=t^2－4×4×64≥0，

解得 t≥32 或 t≤－32（不和题意，舍去），

当 t=32 时，x=$\frac{32\pm0}{8}$=4，

∴x=4 时，该设备的年平均花费最低.

故选：B.

7.【解答】若曲线 mx^2－（m－2）y^2=1 为双曲线，

则对应的标准方程为$\frac{x^2}{\frac{1}{m}}-\frac{y^2}{\frac{1}{m-2}}=1$，

则$\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{m-2}$＞0，即 m（m－2）＞0，

解得 m＞2 或 m＜0，

故“m＞3”是“曲线 mx^2－（m－2）y^2=1 为双曲线”的充分不必要条件，

故选：A

8.【解答】由题意，P 为对角线 AC_1 的中点，Q 为底面 ABCD 的中心时，B_1P+PQ 最小.

∵长方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 中，AB=$\sqrt{2}$，　$BC=AA_1$=1，

∴$B_1P=\frac{1}{2}B_1D=1$，$PQ=\frac{1}{2}AA_1=\frac{1}{2}$，

∴B_1P+PQ 的最小值为$\frac{3}{2}$，

故选：C.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】$\frac{10i}{3+i}=\frac{10i(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{10+30i}{10}=1+3i$.

故答案为：1+3i.

10.【解答】抛物线 C：$y^2=4x$ 的焦点坐标（1，0），准线方程为：x=﹣1，

圆的半径为：2，圆的方程为$（x﹣1）^2+y^2=4$.

故答案为：x=﹣1；$（x﹣1）^2+y^2=4$.

11.【解答】函数 f（x）$=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>1\\ -x-2, & x\leqslant 1\end{cases}$，则 f（2）$=\frac{1}{2}$，

f[f（2）]=f（$\frac{1}{2}$）$=-\frac{1}{2}-2=-\frac{5}{2}$.

当 x≤1 时，f（x）≥﹣3.

当 x＞1 时，f（x）∈（0，1），

所以函数的值域为：[﹣3，+∞）.

故答案为：$-\frac{5}{2}$，[﹣3，+∞）.

12.【解答】∵△ABC 中，$a=\sqrt{7}$，b=3，c=2，

∴$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{9+4-7}{12}=\frac{1}{2}$，

∴$A=\frac{\pi}{3}$，

则 $S_{△ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，

故答案为：$\frac{\pi}{3}$；$\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

13.【解答】由 z=x+my 得 y=$-\frac{1}{m}x+\frac{z}{m}$，

作出不等式组对应的平面区域如图：

∵z=x+my 的最大值为$\frac{5}{3}$，

∴此时 z=x+my=$\frac{5}{3}$，

此时目标函数过定点 C（$\frac{5}{3}$，0），

作出 x+my=$\frac{5}{3}$的图象，

由图象知当直线 x+my=$\frac{5}{3}$，经过但 A 时，

直线 AC 的斜率 k=$-\frac{1}{m}$＞－1，

即 m＞1，

由平移可知当直线 y=$-\frac{1}{m}x+\frac{z}{m}$，

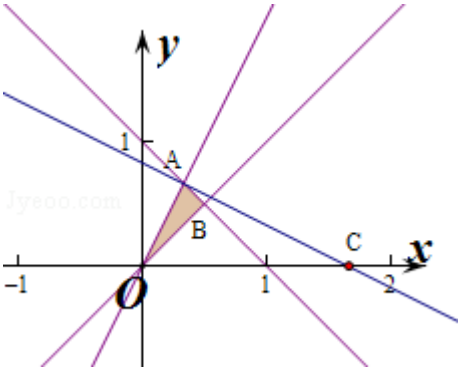
经过点 A 时，目标函数取得最大值，此时满足条件，

由$\begin{cases}y=2x\\x+y=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\y=\frac{2}{3}\end{cases}$，即 A（$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$），

同时，A 也在直线 x+my=$\frac{5}{3}$上，

代入得$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}m=\frac{5}{3}$，解得 m=2，

故答案为：2.



14.【解答】当 0≤x≤arctan2 时，f（x）=$\frac{1}{2}$tanx；

当 arctan2＜x＜$\frac{\pi}{2}$，在△OBE 中，f（x）=$S_{矩形OABM}-S_{△OME}=2-\frac{1}{2}EM\cdot OM=2-\frac{2}{tanx}$；

当 x=$\frac{\pi}{2}$时，f（x）=2；

当 $\frac{\pi}{2}$＜x≤π－arctan2 时，同理可得 f（x）=2－$\frac{2}{tanx}$.

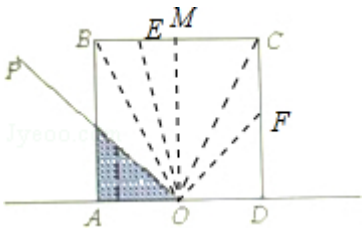
当 π－arctan2＜x≤π 时，f（x）=4－$\frac{1}{2}\times1\times\tan(\pi-x)=4+\frac{1}{2}$tanx. 于是可得：

①f（$\frac{\pi}{3}$）=$\frac{1}{2}$•tan$\frac{\pi}{3}$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$，正确；

②当 $\frac{\pi}{2}$＜x≤π－arctan2 时，由 f（x）=2－$\frac{2}{\tan x}$，为增函数．当 π－arctan2＜x≤π 时，f（x）=4+$\frac{1}{2}$tanx，为增函数，因此不正确．

③∀x∈$[0, \frac{\pi}{2}]$，由图形及其上面，利用对称性可得：f（x）+f（π－x）=4，因此正确；

故答案为：①③．



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15.【解答】（Ⅰ）由题意可得 cosx－sinx≠0，

即 tanx≠1，解得 x≠kπ+$\frac{\pi}{4}$，k∈Z，

∴函数 f（x）的定义域为{x|x≠kπ+$\frac{\pi}{4}$，k∈Z}；

（Ⅱ）化简可得 f（x）=$\frac{\cos 2x(\sin x+\cos x)}{\cos x-\sin x}$=$\frac{(\cos^2 x-\sin^2 x)(\sin x+\cos x)}{\cos x-\sin x}$

=（cosx+sinx）^{2}=sin2x+1，

由 2kπ－$\frac{\pi}{2}$≤2x≤2kπ+$\frac{\pi}{2}$可得 kπ－$\frac{\pi}{4}$≤x≤kπ+$\frac{\pi}{4}$，

又 x≠kπ+$\frac{\pi}{4}$，k∈Z

∴函数 f（x）的单调增区间为（kπ－$\frac{\pi}{4}$，kπ+$\frac{\pi}{4}$）k∈Z

16.【解答】（Ⅰ）∵a_{n+1}=1+S_n（n∈N^*），

∴当 n≥2 时，a_n=1+S_{n-1}，

∴a_{n+1}－a_n=a_n，即 a_{n+1}=2a_n，

当 n=1 时，a_2=1+a_1=2，∴$\frac{a_2}{a_1}$=2，

综上可得：a_{n+1}=2a_n（n∈N^*），

∴数列{a_n}是等比数列，公比为 2，

∴ $a_n=2^{n-1}$.

（II）数列$\{b_n\}$为等差数列，且$b_1=a_1=1$，公差为$\frac{a_2}{a_1}=2$.

∴$b_n=1+2（n-1）=2n-1$.

当$n\geqslant 3$时，$b_{n+1}=2n+1$.

$1+b_1+b_2+\cdots+b_n=1+\frac{n(1+2n-1)}{2}=n^2+1$.

∴$n^2+1-（2n+1）=n（n-2）>0$，

∴$b_{n+1}<1+b_1+b_2+\cdots+b_n$.

17.【解答】（I）解：在Rt△ADE中，$AE=\sqrt{AD^2-DE^2}=3\sqrt{3}$，

∴$S_{△ADE}=\frac{1}{2}AE\cdot DE=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. ∵CD⊥平面ADE，∴$V_{C-ADE}=\frac{1}{3}CD\cdot S_{△ADE}=\frac{1}{3}\times 6\times\frac{9\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$.

（II）证明：∵CD⊥平面ADE，∴CD⊥AE，又AE⊥ED，ED∩CD=D，∴AE⊥平面CDE，又AE⊂平面ACE，∴平面ACE⊥平面CDE；

（III）解：在线段DE上存在一点F，使AF∥平面BCE，$\frac{EF}{ED}=\frac{1}{3}$.

下面给出证明：设F为线段DE上的一点，且$\frac{EF}{ED}=\frac{1}{3}$.

过F作FM∥CD交CE于点M，则$FM=\frac{1}{3}CD$，

∵CD⊥平面ADE，AB⊥平面ADE，

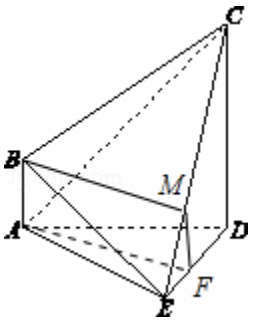
∴CD∥AB. 又CD=3AB，

∴$MF\overset{//}{=}AB$，

∴四边形ABMF是平行四边形，

∴AF∥BM，又AF⊄平面BCE，BM⊂平面BCE.

∴AF∥平面BCE.



18.【解答】（Ⅰ）由茎叶图可得甲组数据的平均数为$\frac{1}{10}$（10+10+14+18+22+25+27+30+41+43）=24，

∴在这10个卖场中，甲型号电视机的“星级卖场”的个数为5；

（Ⅱ）记事件 A 为“a＞b”，由于乙组数据的平均数为 26.7，

∴$\frac{1}{10}$[10+18+20+22+23+31+32+（30+a）+（30+b）+43]=26.7，解得 a+b=8，

而 a 和 b 的取值为：（0，8），（1，7），（2，6），（3，5），（4，4），（5，3），

（6，2），（7，1），（8，0），共 9 种情况，

其中满足 a＞b 的为：（5，3），（6，2），（7，1），（8，0），共 4 种情况

∴所求概率 P=$\frac{4}{9}$；

（Ⅲ）由题意可知当 b=0 时，s^2达到最小值.

19.【解答】（Ⅰ）解：∵点 A 为椭圆 E 的左顶点，点 B 为椭圆 E 的上顶点，

∴A（－a，0），B（0，b），

又∵|AB|=2，∴$a^2+b^2=4$，

∵e=$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

∴a=$\sqrt{3}$，b=1，

∴椭圆 E 的方程为：$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

（Ⅱ）证明：由题意知 $a^2+b^2=4$，从而椭圆 E 的方程为：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4-a^2}=1$，

则 F_1（－c，0），F_2（c，0），c=$\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{2a^2-4}$，

设 P（x_0，y_0），由题意知 $x_0\neq c$，

则直线 F_1P 的斜率 $k_{F_1P}=\frac{y_0}{c+x_0}$，直线 F_2P 的斜率 $k_{F_2P}=\frac{y_0}{x_0-c}$，

∴直线 F_2P 的方程为：y=$\frac{y_0}{x_0-c}$（x－c），

当 x=0 时，y=－$\frac{y_0}{x_0-c}$c，即点 Q（0，－$\frac{y_0}{x_0-c}$c），

∴直线 F_1Q 的斜率 $k_{F_1Q}=\frac{y_0}{c-x_0}$，

∵以 PQ 为直径的圆经过点 F_1，

∴$PF_1\perp F_1Q$，∴$k_{F_1P}\cdot k_{F_1Q}=\frac{y_0}{c+x_0}\cdot\frac{y_0}{c-x_0}=-1$，

化简得：$y_0^2=x_0^2-(2a^2-4)$，①

又∵P 为椭圆 E 上一点，且在第一象限内，

$\therefore \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{4-a^2}=1$，$x_0$、$y_0>0$，②

由①②，解得 $x_0=\frac{a^2}{2}$，$y_0=2-\frac{1}{2}a^2$，

$\therefore x_0+y_0=2$，即点 P 在直线 x+y－2=0 上.

20.【解答】（Ⅰ）当 $a=-\frac{1}{4}$时，$f(x)=\frac{1-x}{1-\frac{1}{4}x^2}$，

导数 $f'(x)=\frac{1}{4}\cdot\frac{-(x-1)^2-3}{(1-\frac{1}{4}x^2)^2}$，

即有 $f'(1)=-\frac{4}{3}$，f（1）=0，

则 f（x）在点（1，f（1））处的切线方程为 $y=-\frac{4}{3}(x-1)$，

即为 4x+3y－4=0；

（Ⅱ）证明：当 a＞0 时，$f(x)=\frac{1-x}{1+ax^2}$的定义域为 R，

$f'(x)=\frac{ax^2-2ax-1}{(1+ax^2)^2}$，

$f'(x)=0$，可得 $x_1=1-\sqrt{1+\frac{1}{a}}<0$，$x_2=1+\sqrt{1+\frac{1}{a}}>1$，

当 $x<x_1$，$x>x_2$时，$f'(x)>0$，f（x）递增，

当 $x_1<x<x_2$时，$f'(x)<0$，f（x）递减.

又 f（1）=0，当 x＜1 时，f（x）＞0，当 x＞1 时，f（x）＜0，

当 x≤1 时，0≤f（x）≤f（x_1），当 x＞1 时，f（x_2）≤f（x）＜0，

记 M=max{|f（x_1）|，f（x_2）|}，

综上，a＞0 时，存在实数 m∈[M+∞），使得对任意的 x，都有－m≤f（x）≤m 成立；

（Ⅲ）当 $a=-\frac{1}{2}$与 a=2 时，不存在实数 k，使得关于 x 的方程仅有负数解.