2015 北京海淀高三二模

数　　学（文）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．（5 分）在复平面内，复数 i^2（1－i）对应的点位于（　　）

A．第一象限　B．第二象限　C．第三象限　D．第四象限

2．（5 分）已知命题 p：∀x＞0，$x+\frac{1}{x}\geqslant 2$，则¬p 为（　　）

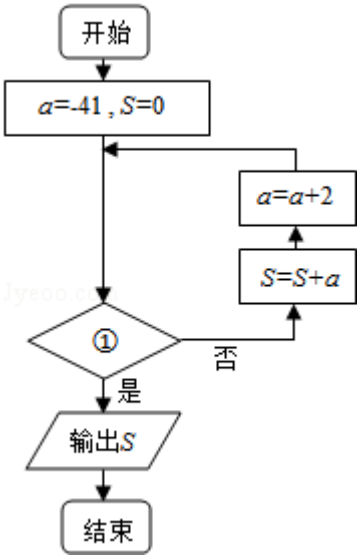
A．$\forall x>0,\ x+\frac{1}{x}<2$　B．$\forall x\leqslant 0,\ x+\frac{1}{x}<2$

C．$\exists x\leqslant 0,\ x+\frac{1}{x}<2$　D．$\exists x>0,\ x+\frac{1}{x}<2$

3．（5 分）圆 C：$x^2+y^2+4x-2y+3=0$ 的圆心坐标及半径分别是（　　）

A．（－2，1），$\sqrt{2}$　B．（2，1），$\sqrt{2}$　C．（－2，1），2　D．（2，－1），2

4．(5 分)如图表示的是求首项为－41，公差为 2 的等差数列$\{a_n\}$前 n 项和的最小值的程序框图．则①处可填写（　　）



A．S＞0　B．S＜0　C．a＞0　D．a=0

5．（5 分）已知点 A（a，a）（a≠0），B（1，0），O 为坐标原点．若点 C 在直线 OA 上，且 BC 与 OA 垂直，则点 C 的坐标是（　　）

A．$(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2})$　B．$(\frac{a}{2},\ -\frac{a}{2})$　C．$(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2})$　D．$(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2})$

6．（5 分）在△ABC 中，若 a=3，$c=\sqrt{3}$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，则 b=（　　）

A．4　B．6　C．$2\sqrt{3}$　D．$\sqrt{6}$

7．（5 分）设 $a=0.2^3$，$b=\log_2 0.3$，$c=\log_{0.3}2$，则（　　）

A．b＜a＜c　B．b＜c＜a　C．c＜b＜a　D．a＜b＜c

8．（5 分）已知不等式组$\begin{cases}x+y\geqslant 4\\ x-y\geqslant -2\\ x\leqslant 2\end{cases}$表示的平面区域为 D，点 O（0，0），A（1，0）．若点 M 是 D 上的动点，则$\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}$的最小值是（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　B．$\frac{\sqrt{5}}{5}$　C．$\frac{\sqrt{10}}{10}$　D．$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．（5 分）以坐标原点为顶点，（－1，0）为焦点的抛物线的方程为_____．

10．（5 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_n\neq 0$（$n\in N^*$），$a_n a_{n+1}=S_n$，则 a_3-a_1=_____．

11．（5 分）已知 f（x）=cosx•lnx，f（x_0）=f（x_1）=0（$x_0\neq x_1$），则$|x_0-x_1|$的最小值是_____．

12．（5 分）满足 cos（α＋β）=cosα+cosβ 的 α，β 的一组值是_____．（写出一组值即可）

13．（5 分）函数 f（x）=x^3e^x的极值点 x_0=_____，曲线 y=f（x）在点（x_0，f（x_0））处的切线方程是_____．

14.（5 分）某网络机构公布某单位关于上网者使用网络浏览器 A、B 的信息：

①316 人使用 A；

②478 人使用 B；

③104 人同时使用 A 和 B；

④567 人只使用 A、B 中的一种网络浏览器.

则这条信息为_____（填“真”或“假”），理由是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程.

15.（13 分）已知函数 f（x）=4sinx﹣cos2x.

（Ⅰ）求 f（$\frac{\pi}{6}$）；

（Ⅱ）求函数 f（x）的最小值.

16.（13 分）某中学为了解初三年级学生“掷实心球”项目的整体情况，随机抽取男、女生各 20 名进行测试，记录的数据如下：

男生投掷距离(单位:米)		女生投掷距离（单位:米）
9 7 7	5	4 6
8 7 6	6	4 5 5 6 6 6 9
6 6	7	0 0 2 4 4 5 5 5 5 8
8 5 5 3 0	8	1
7 3 1 1	9	
2 2 0	10	

已知该项目评分标准为：

男生投掷距离（米）	…	[5.4，6.0）	[6.0，6.6）	[6.6，7.4）	[7.4，7.8）	[7.8，8.6）	[8.6，10.0）	[10.0，+∞）
女生投掷距离（米）	…	[5.1，5.4）	[5.4，5.6）	[5.6，6.4）	[6.4，6.8）	[6.8，7.2）	[7.2，7.6）	[7.6，+∞）
个人得分（分）	…	4	5	6	7	8	9	10

（Ⅰ）求上述 20 名女生得分的中位数和众数；

（Ⅱ）从上述 20 名男生中，有 6 人的投掷距离低于 7.0 米，现从这 6 名男生中随机抽取 2 名男生，求抽取的 2 名男生得分都是 4 分的概率；

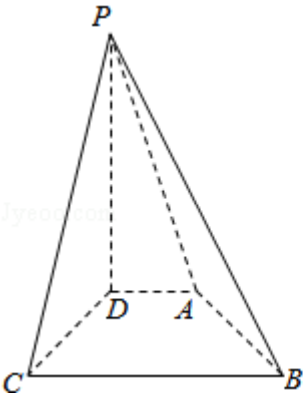
（Ⅲ）根据以上样本数据和你所学的统计知识，试估计该年级学生实心球项目的整体情况.（写出两个结论即可）

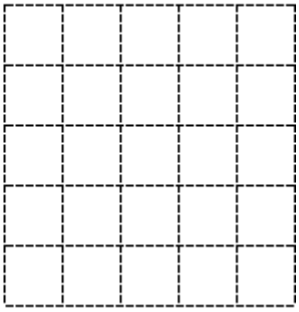
17.（13 分）如图所示，在四棱锥 P﹣ABCD 中，PD⊥平面 ABCD，又 AD∥BC，AD⊥DC，且 PD=BC=3AD=3.

（Ⅰ）画出四棱准 P﹣ABCD 的正视图；

（Ⅱ）求证：平面 PAD⊥平面 PCD；

（Ⅲ）求证：棱 PB 上存在一点 E，使得 AE∥平面 PCD，并求$\frac{PE}{EB}$的值.





18.（14 分）已知数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，又数列$\{b_n\}$满足 $b_n=2\log_2 a_n$，S_n是数列$\{b_n\}$的前 n 项和.

（Ⅰ）求 S_n；

（Ⅱ）若对任意的 $n\in N^*$，都有$\frac{S_n}{a_n}\leqslant\frac{S_k}{a_k}$成立，求正整数 k 的值.

19.（13 分）已知函数 $f(x)=a\ln x-x+2$，其中 $a\neq 0$.

（Ⅰ）求 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）若对任意的 $x_1\in[1,e]$，总存在 $x_2\in[1,e]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=4$，求实数 a 值.

20.（14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，点 D 为椭圆 C 的左顶点，对于正常数 λ，如果存在过点 M（x_0，0）（$-2<x_0<2$）的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，使得 $S_{\triangle AOB}=\lambda S_{\triangle AOD}$，则称点 M 为椭圆 C 的“λ 分点“.

（1）判断点 M（1，0）是否为椭圆 C 的“1 分点“，并说明理由；

（2）证明：点 M（1，0）不是椭圆 C 的“2 分点”；

（3）如果点 M 为椭圆 C 的“2 分点“，写出 x_0的取值范围.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】复数 i^2（1﹣i）=﹣1（1﹣i）=﹣1+i；对应的点为（﹣1，1），所以复数 i^2（1﹣i）对应的点在第二象限；

故选：B.

2.【解答】命题 p 为全称命题，则命题的否定为：$\exists x>0$，　$x+\frac{1}{x}<2$，

故选：D

3.【解答】圆 C：$x^2+y^2+4x-2y+3=0$，即 圆 C：$(x+2)^2+(y-1)^2=2$，

故圆心为（﹣2，1）、半径为$\sqrt{2}$，

故选：A.

4.【解答】由程序设计意图可知，S 表示此等差数列$\{a_n\}$前 n 项和，又因为此数列首项为负数，公差为正数，求前 n 项和的最小值只需累加至最后一个非正项即可，故①处可填写：a＞0.

故选：C.

5.【解答】设 C（x，y），因为点 C 在直线 OA 上，且 BC 与 OA 垂直，所以$\begin{cases}x=y\\ \frac{y}{x-1}=-1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\end{cases}$；

故选：D.

6.【解答】∵a=3，c=$\sqrt{3}$，$\angle A=\frac{\pi}{3}$，

∴利用余弦定理可得：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，可得：$3^2=b^2+3-2b\times\sqrt{3}\times\cos\frac{\pi}{3}$，整理可得：$b^2-\sqrt{3}b-6=0$，从而解得：b=2$\sqrt{3}$.

故选：C.

7.【解答】∵$0<0.2^3<1$，$b=\log_20.3<\log_20.5=-1$，$\log_{0.3}2>\log_{0.3}\frac{10}{3}=-1$，

∴b＜c＜a，

故选：B.

8.【解答】设 $z=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}$，则 $z=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}=|\overrightarrow{OA}|\cdot\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OM}|}=|\overrightarrow{OA}|\cdot\cos\angle AOM$，

∵O（0，0），A（1，0）.

∴$|\overrightarrow{OA}|=1$，

∴$z=|\overrightarrow{OA}|\cdot\cos\angle AOM=\cos\angle AOM$，

作出不等式组对应的平面区域如图：

要使 $\cos\angle AOM$，

则∠AOM 最大，

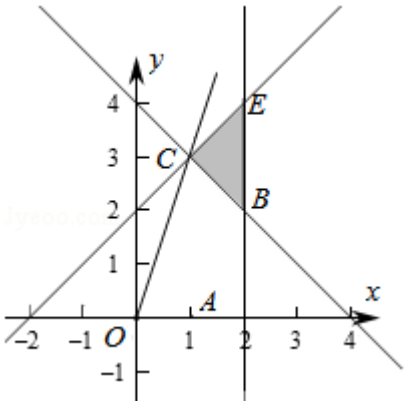
即当 M 在 C 处时，∠AOM 最大，

由$\begin{cases}x+y=4\\x-y=-2\end{cases}$得$\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$，即 C（1，3），

则$|AC|=\sqrt{10}$，

则 $\cos\angle AOM=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

故选：C.



二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】由焦点（－1，0），可设抛物线的方程为 $y^2=-2px$

∵$\frac{p}{2}=1$

∴p=2

∴$y^2=-4x$.

故答案为：$y^2=-4x$.

10.【解答】∵$a_na_{n+1}=S_n$，∴$a_{n+1}=\frac{S_n}{a_n}$；

∴$a_2=\frac{S_1}{a_1}=1$；$a_3=\frac{S_2}{a_2}=\frac{1+a_1}{1}=1+a_1$；

∴$a_3-a_1=1+a_1-a_1=1$，

故答案为：1.

11.【解答】∵f（x）=cosx•lnx，f（x_0）=f（x_1）=0（$x_0\neq x_1$），

∴令 f（x）=0，得 cosx=0 或 lnx=0；

解得 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in Z$ 或 x=1；

∴$|x_0-x_1|$的最小值是$\frac{\pi}{2}-1$.

故答案为：$\frac{\pi}{2}-1$.

12.【解答】一般情况下不满足 cos（α+β）=cosα+cosβ，

但在特殊情况下是成立的，如 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，$\beta=-\frac{\pi}{4}$时，

左边=$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，右边=$\cos(-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

故答案为：$\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{2}\\ \beta=-\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

13.【解答】f′（x）=$3x^2\cdot e^x+x^3e^x=x^2e^x(x+3)$，

令 f′（x）=0，解得：x=-3，

∴$x_0=-3$，f（x_0）=$-27e^{-3}$，

∴切线方程是：$y=-27e^{-3}$，

故答案为：-3，$y=-27e^{-3}$

14.【解答】根据题意，可得只使用 A 浏览器的人数有：316-104=212，

只使用 B 浏览器的人数有：478-104=374，

所以只使用 A、B 中的一种网络浏览器人数有：212+374=586.

故答案为：假，理由是由①②③知只使用一种浏览器的人数为：316-104+478-104=586.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明、演算步骤或证明过程．

15.【解答】（Ⅰ）$f(\frac{\pi}{6})=4\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}=4\times\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. …（4 分）

（Ⅱ）∵f（x）=4sinx-cos2x

=4sinx－（1－2sin^{2}x）…（6分）

=2sin^{2}x+4sinx－1

=2（sinx+1）^{2}－3．…（8分）

∵－1≤sinx≤1，

∴当sinx=－1，即$x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$时，f（x）取得最小值－3．…（13分）

16.【解答】（Ⅰ） 20名女生掷实心球得分如下：5，6，7，7，7，7，7，7，8，8，8，9，9，9，9，9，9，9，10，10．所以中位数为8，众数为9．

（Ⅱ） 由题意可知，掷距离低于7.0米的男生的得分如下：4，4，4，6，6，6．这6名男生分别记为A_1，A_2，A_3，B_1，B_2，B_3．从这6名男生中随机抽取2名男生，所有可能的结果有15种，它们是：（A_1，A_2），（A_1，A_3），（A_1，B_1），（A_1，B_2），（A_1，B_3），（A_2，A_3），（A_2，B_1），（A_2，B_2），（A_2，B_3），（A_3，B_1），（A_3，B_2），（A_3，B_3），（B_1，B_2），（B_1，B_3），（B_2，B_3）．

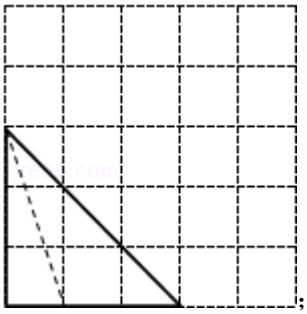
用C表示“抽取的2名男生得分均为（4分）”这一事件，则C中的结果有3个，它们是：（A_1，A_2），（A_1，A_3），（A_2，A_3）．

所以，所求得概率$P(C)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$．

（Ⅲ）．例如：①估计该学校女生的得分的中位数和众数中位数为8，众数为9，

②成绩还需要提高，等等（合理即可）．

17.【解答】（Ⅰ）解：四棱准P－ABCD的正视图如图所示．



（Ⅱ）证明：因为 PD⊥平面ABCD，AD⊂平面ABCD，

所以 PD⊥AD．

因为 AD⊥DC，PD∩CD=D，PD⊂平面PCD，CD⊂平面PCD，

所以AD⊥平面PCD，

因为 AD⊂平面PAD，

所以 平面PAD⊥平面PCD．

（Ⅲ）分别延长CD，BA交于点O，连接PO，在棱PB上取一点E，使得$\frac{PE}{EB}=\frac{1}{2}$，

下证 AE∥平面 PCD，

因为 AD∥BC，BC=3AD，

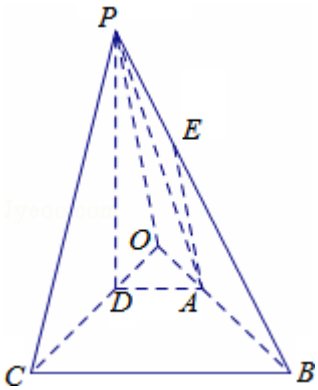
所以 $\frac{OA}{OB}=\frac{AD}{BC}=\frac{1}{3}$，即$\frac{OA}{AB}=\frac{1}{2}$，

所以 $\frac{OA}{AB}=\frac{PE}{EB}$.

所以 AE∥OP，

因为 OP⊂平面 PCD，AE⊄平面 PCD，

所以 AE∥平面 PCD.



18.【解答】（Ⅰ）因为数列$\{a_n\}$是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

所以 $a_n=2\times 2^{n-1}=2^n$. …（2 分）

所以 $b_n=2\log_2 a_n=2\log_2 2^n=2n$. …（3 分）

所以 $S_n=2+4+\cdots+2n=\frac{n(2+2n)}{2}=n^2+n$; …（6 分）

（Ⅱ）令 $c_n=\frac{S_n}{a_n}=\frac{n^2+n}{2^n}=\frac{n(n+1)}{2^n}$，

则 $c_{n+1}-c_n=\frac{S_{n+1}}{a_{n+1}}-\frac{S_n}{a_n}=\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}-\frac{n(n+1)}{2^n}=\frac{(n+1)(2-n)}{2^{n+1}}$. …（9 分）

所以当 n=1 时，$c_1<c_2$，

当 n=2 时，$c_3=c_2$，

当 n≥3 时，$c_{n+1}-c_n<0$，即 $c_3>c_4>c_5>\cdots$，

所以数列$\{c_n\}$中最大项为 c_2和 c_3.

所以存在 k=2 或 3，使得对任意的正整数 n，都有$\frac{S_k}{a_k}\geqslant\frac{S_n}{a_n}$. …（13 分）

19.【解答】（Ⅰ）$f'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$，　$x>0$，

当 a＜0 时，对∀x∈（0，+∞），f′（x）＜0，所以 f（x）的单调递减区间为（0，+∞）；

当 a＞0 时，令 f′（x）=0，得 x=a，

因为 x∈（0，a）时，f′（x）＞0；x∈（a，+∞）时，f′（x）＜0，

所以 f（x）的单调递增区间为（0，a），单调递减区间为（a，+∞）.

（Ⅱ）用 $f(x)_{max}$，$f(x)_{min}$ 分别表示函数 f（x）在[1，e]上的最大值，最小值，

当 a≤1 且 a≠0 时，由（Ⅰ）知：在[1，e]上，f（x）是减函数，

所以 $f(x)_{max}=f(1)=1$；

因为 对任意的 $x_1∈[1，e]$，$x_2∈[1，e]$，$f(x_1)+f(x_2)≤2f(1)=2＜4$，

所以对任意的 $x_1∈[1，e]$，不存在 $x_2∈[1，e]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=4$；

当 1＜a＜e 时，由（Ⅰ）知：在[1，a]上，f（x）是增函数，在[a，e]上，f（x）是减函数，

所以 $f(x)_{max}=f(a)=a\ln a-a+2$；

因为 对 $x_1=1$，$∀x_2∈[1，e]$，$f(1)+f(x_2)≤f(1)+f(a)=1+a\ln a-a+2=a(\ln a-1)+3＜3$，

所以 对 $x_1=1∈[1，e]$，不存在 $x_2∈[1，e]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=4$；

当 a≥e 时，令 g（x）=4－f（x）（x∈[1，e]），

由（Ⅰ）知：在[1，e]上，f（x）是增函数，进而知 g（x）是减函数，

所以 $f(x)_{min}=f(1)=1$，$f(x)_{max}=f(e)=a-e+2$，$g(x)_{max}=g(1)=4-f(1)$，$g(x)_{min}=g(e)=4-f(e)$；

因为 对任意的 $x_1∈[1，e]$，总存在 $x_2∈[1，e]$，使得 $f(x_1)+f(x_2)=4$，即 $f(x_1)=g(x_2)$，

所以 $\begin{cases}f(1)\geqslant g(e)\\f(e)\leqslant g(1)\end{cases}$ 即 $\begin{cases}f(1)+f(e)\geqslant 4\\f(e)+f(1)\leqslant 4.\end{cases}$，

所以 f（1）+f（e）=a－e+3=4，解得 a=e+1，

综上所述，实数 a 的值为 e+1.

20.【解答】（1）点 M（1，0）为椭圆 C 的“1 分点“，

理由是：当直线 l 的斜率不存在，即为 x=1.

将 x=1 代入椭圆方程得 $y^2=1-\frac{1}{4}$，

解得 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$S_{△AOB}=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$S_{△AOD}=\frac{1}{2}\times 2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

即有 $S_{△AOB}=S_{△AOD}$，

则点 M（1，0）为椭圆 C 的“1 分点“；

（2）证明：假设点 M（1，0）是椭圆 C 的“2 分点”，

即有 $S_{△AOB}=2S_{△AOD}$，

设直线 l 的方程为 $x=my+1$，代入椭圆方程可得，

$(4+m^2)y^2+2my-3=0$，

判别式 $4m^2+12(4+m^2)>0$，显然成立，

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

$y_1+y_2=-\frac{2m}{4+m^2}$，$y_1y_2=-\frac{3}{4+m^2}$，

由 $S_{\triangle AOB}=2S_{\triangle AOD}$，

即为 $\frac{1}{2}\cdot|OM|\cdot|y_1-y_2|=2\cdot\frac{1}{2}\cdot|OD|\cdot|y_1|$，

由 $|OM|=1$，$|OD|=2$，

化简可得 $y_2=-3y_1$（$y_2=5y_1$ 舍去），

代入韦达定理可得，

$(\frac{m}{4+m^2})^2=\frac{1}{4+m^2}$，

解得 $m\in\varnothing$，

则有点 M（1，0）不是椭圆 C 的“2 分点”；

（3）如果点 M 为椭圆 C 的“2 分点“，

即有 $S_{\triangle AOB}=2S_{\triangle AOD}$，

设直线 l 的方程为 $x=my+x_0$，代入椭圆方程可得，

$(4+m^2)y^2+2mx_0y+x_0^2-4=0$，

判别式 $(2mx_0)^2-4(4+m^2)(x_0^2-4)>0$，

即为 $m^2>x_0^2-4$，由 $-2<x_0<2$，

$\triangle>0$ 显然成立，

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，可设 $y_1>0$，$y_2<0$，

$y_1+y_2=-\frac{2mx_0}{4+m^2}$，$y_1y_2=\frac{x_0^2-4}{4+m^2}$，

由 $S_{\triangle AOB}=2S_{\triangle AOD}$，

即为 $\frac{1}{2}\cdot|OM|\cdot|y_1-y_2|=2\cdot\frac{1}{2}\cdot|OD|\cdot|y_1|$，

由 $|OM|=|x_0|$，$|OD|=2$，

即有 $y_2=(1-\frac{4}{|x_0|})y_1$，

代入韦达定理可得，

$$\frac{(2-\frac{4}{|x_0|})^2}{1-\frac{4}{|x_0|}}=\frac{4m^2x_0^2}{x_0^2-4},$$

由 $m^2>0$ 即为（$1-\frac{4}{|x_0|}$）（x_0^2-4）＞0，

由 $-2<x_0<2$，可得$|x_0|<2$，$x_0^2<4$，

则有 x_0的取值范围为（-2，0）∪（0，2）.