2015 北京昌平高三二模

数　　学（理）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1.（5 分）已知集合 A={x|x^2－3x－4=0}，B={0，1，4，5}，则 A∩B 中元素的个数为（　　）

A．0 个 B．1 个 C．2 个 D．3 个

2.（5 分）$\int_0^1(2x^3-1)dx$等于（　　）

A．$-\frac{1}{2}$ B．$\frac{2}{3}$ C．1 D．6

3.（5 分）已知等差数列{a_n}的公差为 2，若 a_1，a_3和 a_4成等比数列，则 a_1可以等于（　　）

A．－4 B．－6 C．－8 D．－10

4.（5 分）“|b|＜2 是“直线 y=$\sqrt{3}$x+b 与圆 x^2+y^2－4y=0 相交”的（　　）

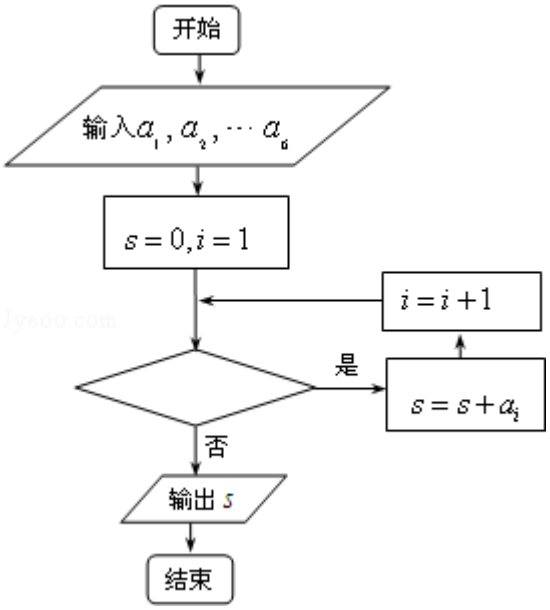
A．充分不必要条件 B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

5.（5 分）在篮球比赛中，某篮球队队员投进三分球的个数如表所示：

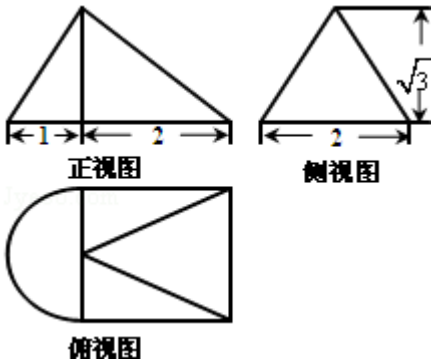
队员 i	1	2	3	4	5	6
三分球个数 a_i	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6

如图是统计上述 6 名队员在比赛中投进的三分球总数 s 的程序框图，则图中的判断框内应填入的条件是（　　）



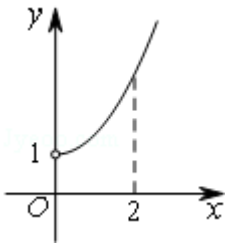
A．i＜6 B．i＜7 C．i＜8 D．i＜9

6.（5 分）一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为（　　）



A．$\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}\pi}{6}$ B．$\frac{8\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ C．$\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{4\sqrt{3}\pi}{3}$ D．$4\sqrt{3}+\sqrt{3}\pi$

7.（5 分）已知函数 y=f（x）（x∈R）是奇函数，其部分图象如图所示，则在（－2，0）上与函数 f（x）的单调性相同的是（　　）



A．$y=x^2+1$　　B．$y=\log_2|x|$

C．$y=\begin{cases}e^x(x\geqslant 0)\\e^{-x}(x<0)\end{cases}$　　D．$y=\cos x$

8．（5 分）已知四面体 A－BCD 满足下列条件：

（1）有一个面是边长为 1 的等边三角形；

（2）有两个面是等腰直角三角形．

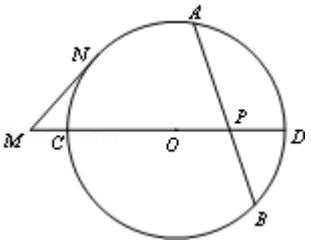
那么四面体 A－BCD 的体积的取值集合是（　　）

A．$\{\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{12}\}$　　B．$\{\frac{1}{6},\frac{\sqrt{3}}{12}\}$　　C．$\{\frac{\sqrt{2}}{12},\frac{\sqrt{3}}{12},\frac{\sqrt{2}}{24}\}$　　D．$\{\frac{1}{6},\frac{\sqrt{2}}{12},\frac{\sqrt{2}}{24}\}$

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.）

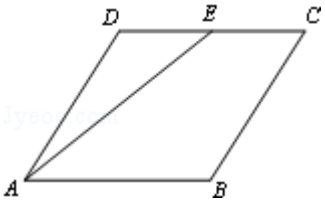
9．（5 分）已知直线 l 的极坐标方程为 $\rho\sin\theta-2\rho\cos\theta+3=0$，则直线 l 的斜率是_____.

10．（5 分）如图，⊙O 中的弦 AB 与直径 CD 相交于点 P，M 为 DC 延长线上一点，MN 与⊙O 相切于点 N，若 AP=8，PB=6，PD=4，MC=2，则 CP=_____，MN=_____.



11．（5 分）在△ABC 中，若 $a=\sqrt{3}$，$b=\sqrt{7}$，$\angle B=\frac{5\pi}{6}$，则边 c=_____.

12．（5 分）如图，在菱形 ABCD 中，AB=1，∠DAB=60°，E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$的值是_____.

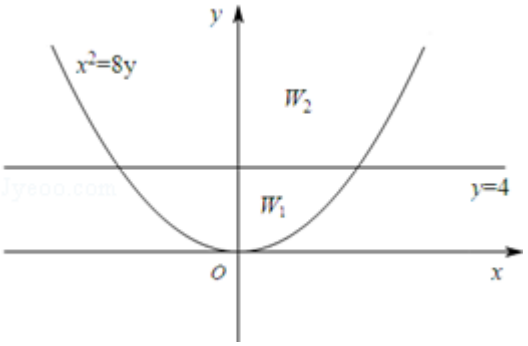


13．（5 分）某班举行联欢会由 5 个节目组成，演出顺序有如下要求：节目甲必须和节目乙相邻，且节目甲不能排在第一个和最后一个，则该班联欢会节目演出顺序的编排方案共有_____种．（用数字作答）

14．（5 分）如图，已知抛物线 $x^2=8y$ 被直线 y=4 分成两个区域 W_1，W_2（包括边界），圆 C：$x^2+(y-m)^2=r^2$（$m>0$）.

（1）若 m=3，则圆心 C 到抛物线上任意一点距离的最小值是_____；

（2）若圆 C 位于 W_2 内（包括边界）且与三侧边界均有公共点，则圆 C 的半径是_____.

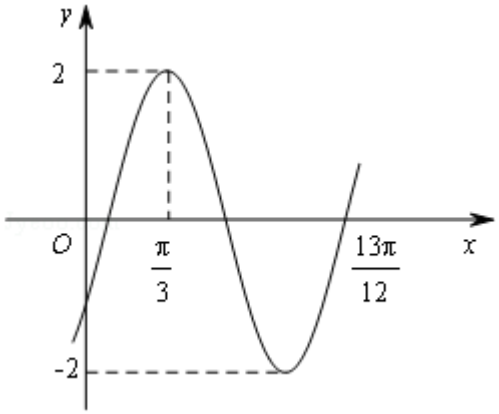


三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

15．（13 分）已知函数 f（x）=Asin（ωx+φ）（A＞0，ω＞0，|φ|＜$\frac{\pi}{2}$，x∈R）的部分图象如图所示．

（Ⅰ）求函数 f（x）的解析式；

（Ⅱ）求函数$g(x)=f(x+\frac{\pi}{12})-f(x+\frac{\pi}{3})$的单调递增区间．



16．（13 分）某大学志愿者协会有 10 名同学，成员构成如下表，其中表中部分数据不清楚，只知道从这 10 名同学中随机抽取一位，抽到该名同学为“数学专业”的概率为$\frac{2}{5}$．

专业 性别	中文	英语	数学	体育
男	n	1	m	1
女	1	1	1	1

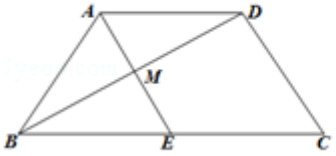
现从这 10 名同学中随机选取 3 名同学参加社会公益活动（每位同学被选到的可能性相同）．

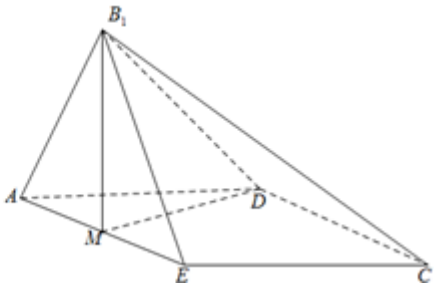
（Ⅰ） 求 m，n 的值；

（Ⅱ）求选出的 3 名同学恰为专业互不相同的男生的概率；

（Ⅲ）设 ξ 为选出的 3 名同学中“女生或数学专业”的学生的人数，求随机变量 ξ 的分布列及其数学期望 Eξ．

17.（14 分）如图，已知等腰梯形 ABCD 中，AD∥BC，AB=AD=$\frac{1}{2}$BC=2，E 是 BC 的中点，AE∩BD=M，将△BAE 沿着 AE 翻折成△B_1AE，使平面 B_1AE⊥平面 AECD.





（Ⅰ） 求证：CD⊥平面 B_1DM；

（Ⅱ）求二面角 D－AB_1－E 的余弦值；

（Ⅲ）在线段 B_1C 上是否存在点 P，使得 MP∥平面 B_1AD，若存在，求出$\frac{B_1P}{B_1C}$的值；若不存在，说明理由.

18.（13 分）已知函数 f（x）=x^2－ax+lnx，a∈R.

（Ⅰ）若函数 f（x）在（1，f（1））处的切线垂直于 y 轴，求实数 a 的值；

（Ⅱ） 在（I）的条件下，求函数 f（x）的单调区间；

（Ⅲ） 若 x＞1 时，f（x）＞0 恒成立，求实数 a 的取值范围.

19.（14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1（a＞b＞0），右焦点$F(\sqrt{2},\ 0)$，点$D(\sqrt{2},\ 1)$在椭圆上.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ） 已知直线 l：y=kx 与椭圆 C 交于 A，B 两点，P 为椭圆 C 上异于 A，B 的动点.

（i）若直线 PA，PB 的斜率都存在，证明：k_{PA}•k_{PB}=－$\frac{1}{2}$；

（ii） 若 k=0，直线 PA，PB 分别与直线 x=3 相交于点 M，N，直线 BM 与椭圆 C 相交于点 Q（异于点 B），求证：A，Q，N 三点共线.

20.（13 分）如图，在一个可以向下和向右方无限延伸的表格中，将正偶数按已填好的各个方格中的数字显现的规律填入各方格中．其中第 i 行，第 j 列的数记作 a_{ij}，i，$j\in N^*$，如 $a_{11}=2$，$a_{23}=16$．

2	4	8	14	…
6	10	16	24	…
12	18	26	36	…
20	28	38	50	…
…	…	…	…	…

（Ⅰ）写出 a_{15}，a_{53}，a_{66} 的值；

（Ⅱ） 若 $a_{ij}=502$，求 i，j 的值；（只需写出结论）

（Ⅲ）设 $b_n=a_{nn}$，$c_n=\frac{1}{2^n}\cdot\frac{4}{b_{n+1}-2}$（$n\in N^*$，），记数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求 S_n；并求正整数 k，使得对任意 $n\in N^*$，均有 $S_k\geqslant S_n$．

参考答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1.【解答】由 A 中方程变形得：（x﹣4）（x+1）=0，

解得：x=4 或 x=﹣1，即 A={﹣1，4}，

∵B={0，1，4，5}，

∴A∩B={4}，交集中元素的个数为 1 个.

故选：B.

2.【解答】 $\int_0^1(2x^3-1)dx=(\frac{1}{2}x^4-x)|_0^1=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$.

故选：A.

3.【解答】∵等差数列$\{a_n\}$的公差 d=2，a_1，a_3和 a_4成等比数列，

∴$(a_1+2d)^2=a_1\cdot(a_1+3d)$，

∴$a_1d+4d^2=0$，∴$a_1=-8$，

故选：C.

4.【解答】圆 $x^2+y^2-4y=0$ 配方为：$x^2+(y-2)^2=4$，可得圆心 C（0，2），半径 R=2.

若直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 与圆 $x^2+y^2-4y=0$ 相交，则$\frac{|b-2|}{2}<2$，

解得﹣2＜b＜6，

因此“|b|＜2 是“直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 与圆 $x^2+y^2-4y=0$ 相交”的充分不必要条件.

故选：A.

5.【解答】模拟执行程序框图，可得

输入 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5，a_6

s=0，i=1

满足条件，$s=s+a_1$，i=2

满足条件，$s=s+a_1+a_2$，i=3

…

满足条件，$s=s+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6$，i=6

此时，由题意，应该不满足条件，退出循环，

故图中的判断框内应填入的条件是 i＜7.

故选：B.

6.【解答】根据三视图得知：

该几何体是由一个底面半径为 1，高为$\sqrt{3}$的半圆锥和一个地面为正方形，高为$\sqrt{3}$的四棱锥组合而成的几何体.

所以：$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\pi+\frac{1}{3}\cdot4\cdot\sqrt{3}=\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{6}\pi$.

故选：A

7.【解答】根据图象可以判断出（0，2）单调递增，

∵函数 y=f（x）（x∈R）是奇函数，

∴图象关于原点对称，

可知：（﹣2，0）上单调递增，

∵$y=x^2$在（﹣2，0）上单调递减，

∴故 A 错误，

∵$y=\log_2|x|=\begin{cases}\log_2 x, & x>0\\ \log_2(-x), & x<0\end{cases}$，

∴在（﹣2，0）上单调递减，

∴故 B 错误，

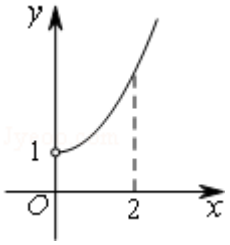
∵$y=\begin{cases}e^x, & x\geqslant0\\ e^{-x}, & x<0\end{cases}$在（﹣2，0）上单调递减，

∴故 C 错误

∵y=cosx 在（﹣2，0）上单调递增，

∴D 正确，

故选：D.



8.【解答】由题意，分类讨论可得

（1）△BCD 是等边三角形，BA⊥AC，DA⊥AC，所以四面体 A﹣BCD 的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{24}$；

（2）△BCD 是等边三角形，BA⊥BD，BA⊥BC，所以四面体 A－BCD 的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1=\frac{\sqrt{3}}{12}$；

（3）△BCD 是等边三角形，BA⊥BD，DC⊥AC，取 AD 的中点 O，可得 BO=DO=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以四面体 A－BCD 的体积为

$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$.

故选：C.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.）

9.【解答】直线 l 的极坐标方程为 ρsinθ－2ρcosθ+3=0，

化为 y－2x+3=0，即 y=2x－3.

∴直线 l 的斜率是 2.

故答案为：2.

10.【解答】由相交弦定理得：AP•PB=PC•PD，所以 8×6=4PC，

所以 PC=12，

所以 MD=MC+PC+PD=18.

由切割线定理得：MN^2=MC•MD=2×18，

所以 MN=6.

故答案为：12，6.

11.【解答】在△ABC 中，若 a=$\sqrt{3}$，b=$\sqrt{7}$，∠B=$\frac{5\pi}{6}$，

由余弦定理可得：$b^2=a^2+c^2-2accosB$，

即 $7=3+c^2+2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}c$．即 $c^2+3c-4=0$，解得 c=1 或 c=－4（舍去）

故答案为：1.

12.【解答】在菱形 ABCD 中，AB=1，∠BAD=60°，

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，

$\therefore\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=1\times1\times cos60°+\frac{1}{2}\times1^2=1$.

故答案为：1.

13.【解答】根据题意，分 3 步进行分析：

①、先安排甲，由于节目甲不能排在第一个和最后一个，则甲必须排在中间 3 个位置，有 3 种情况，

②、再安排节目乙，由于节目甲必须和节目乙相邻，则节目乙必须排在与甲相邻的 2 个位置，有 2 种情况，

③、对于剩下的 3 个节目，进行全排列，安排在剩余的 3 个空位中，有 $A_3^3=6$ 种情况，

则共有 $3\times2\times6=36$ 种不同的编排方案；

故答案为 36.

14.【解答】（1）若 m=3，记圆 C 与抛物线的交点到圆心的距离为 d（=r），

则 $d=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$

$=\sqrt{8y+(y-3)^2}$

$=\sqrt{(y+1)^2+8}$，

∵$8y=x^2\geqslant0$，即 $y\geqslant0$，

∴$\sqrt{(y+1)^2+8}\geqslant\sqrt{(0+1)^2+8}=3$，

即 $d_{min}=3$；

（2）联立圆 C 与抛物线方程，得$\begin{cases}x^2=8y\\x^2+(y-m)^2=r^2\end{cases}$，

化简得 $y^2+（8-2m）y+m^2-r^2=0$，

∴$\triangle=（8-2m）^2-4（m^2-r^2）$

$=4（r^2-8m+16）$，

∵圆 C 位于 W_2 内（包括边界）且与三侧边界均有公共点，

∴$\begin{cases}\triangle=0\\m-4=r\end{cases}$，消去 m 得 $r^2-8r-16=0$，

解得 $r=4+4\sqrt{2}$；

故答案为：3，$4+4\sqrt{2}$.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

15. 【解答】（I）由题意可知，A=2，$\frac{3T}{4}=\frac{9\pi}{12}$，得 $T=\pi$，$T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，解得 $\omega=2$. $f(\frac{\pi}{3})=2\sin(2\times\frac{\pi}{3}+\phi)=2$，

即$\frac{2\pi}{3}+\phi=\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，$|\phi|<\frac{\pi}{2}$，

所以 $\phi=-\frac{\pi}{6}$，故$f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$. …（7 分）

（II）∵$g(x)=2\sin(2(x+\frac{\pi}{12})-\frac{\pi}{6})-2\sin(2(x+\frac{\pi}{3})-\frac{\pi}{6})$

$=2\sin 2x-2\sin(2x+\frac{\pi}{2})$

$=2\sin 2x-2\cos 2x$

$=2\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$,

$\therefore$ 由 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in Z$，可解得：$-\frac{\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{8}+k\pi$，$k\in Z$.

故 g（x）的单调递增区间是 $[-\frac{\pi}{8}+k\pi,\ \frac{3\pi}{8}+k\pi]$，$k\in Z$.. …（13 分）

16.【解答】（I）设事件 A：从 10 位学生中随机抽取一位，抽到该名同学为“数学专业”.

由题意可知，“数学专业”的学生共有（1+m）人.

则 $P(A)=\frac{1+m}{10}=\frac{2}{5}$.

解得 m=3.

所以 n=1. …（4 分）

（II）设事件 B：从这 10 名同学中随机选取 3 名同学为专业互不相同的男生.

则 $P(B)=\frac{C_3^1C_3^2+1}{C_{10}^3}=\frac{1}{12}$. …（7 分）

（III）由题意，ξ 的可能取值为 0，1，2，3.

由题意可知，“女生或数学专业”的学生共有 7 人.

所以 $P(\xi=0)=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$，$P(\xi=1)=\frac{C_7^1C_3^2}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}=\frac{7}{40}$，$P(\xi=2)=\frac{C_7^2C_3^1}{C_{10}^3}=\frac{63}{120}=\frac{21}{40}$，

$P(\xi=3)=\frac{C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{35}{120}=\frac{7}{24}$.

所以 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{21}{40}$	$\frac{7}{24}$

所以 $E\xi=0\times\frac{1}{120}+1\times\frac{7}{40}+2\times\frac{21}{40}+3\times\frac{7}{24}=\frac{21}{10}$. …（13 分）

17.【解答】（Ⅰ）证明：由题意可知四边形 ABED 是平行四边形，所以 AM=ME，故 $B_1M\perp AE$.

又因为 AB=BE，M 为 AE 的中点，所以 BM⊥AE，

即 DM⊥AE. 又因为 AD∥BC，AD=CE=2.

所以四边形 ADCE 是平行四边形.

所以 AE∥CD.

故 CD⊥DM.

因为平面 B_1AE⊥平面 AECD，平面 B_1AE∩平面 AECD=AE，B_1M⊂平面 AECD

所以 B_1M⊥平面 AECD．B_1M⊥AE．

因为 CD⊂平面 AECD，所以 B_1M⊥CD．

因为 MD∩B_1M=M，MD、B_1M⊂平面 B_1MD，

所以 CD⊥平面 B_1MD．…（5 分）

（Ⅱ）解：以 ME 为 x 轴，MD 为 y 轴，MB_1 为 z 轴建立空间直角坐标系，则$C(2, \sqrt{3}, 0)$，$B_1(0, 0, \sqrt{3})$，

A（－1，0，0），$D(0, \sqrt{3}, 0)$．

平面 AB_1E 的法向量为$\overrightarrow{MD}$=（0，$\sqrt{3}$，0）．

设平面 DB_1A 的法向量为$\vec{n}$=（x，y，z），因为$\overrightarrow{AB_1}$=（1，0，$\sqrt{3}$），$\overrightarrow{AD}$=（1，$\sqrt{3}$，0），$\begin{cases} x+\sqrt{3}z=0 \\ x+\sqrt{3}y=0 \end{cases}$，

令 z=1 得，$\vec{n}$=（$-\sqrt{3}$，1，1）．

所以 cos＜$\vec{n}$，$\overrightarrow{MD}$＞=$\frac{\sqrt{5}}{5}$，因为二面角 D－AB_1－E 为锐角，

所以二面角 D－AB_1－E 的余弦值为$\frac{\sqrt{5}}{5}$．…（10 分）

（Ⅲ） 存在点 P，使得 MP∥平面 B_1AD．…（11 分）

法一：取线段 B_1C 中点 P，B_1D 中点 Q，连结 MP，PQ，AQ．

则 PQ∥CD，且 $PQ=\frac{1}{2}CD$．

又因为四边形 AECD 是平行四边形，所以 $AE \parallel CD$．

因为 M 为 AE 的中点，则 $AM \parallel PQ$．

所以四边形 AMPQ 是平行四边形，则 $MP \parallel AQ$．

又因为 AQ⊂平面 AB_1D，所以 MP∥平面 AB_1D．

所以在线段 B_1C 上存在点 P，使得 MP∥平面 B_1AD，$\frac{B_1P}{B_1C}=\frac{1}{2}$．…（14 分）

法二：设在线段 B_1C 上存在点 P，使得 MP∥平面 B_1AD，

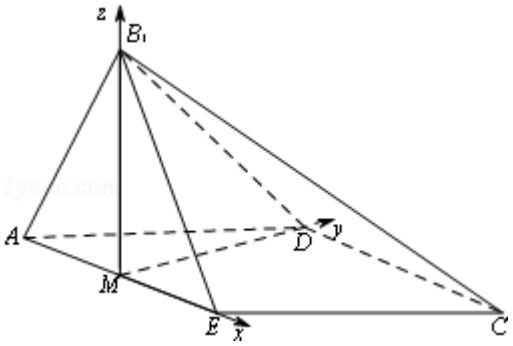
设$\overrightarrow{B_1P}=\lambda\overrightarrow{B_1C}$，（0≤λ≤1），$C(2, \sqrt{3}, 0)$，因为$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{B_1P}$．

所以$\overrightarrow{MP}=(2\lambda, \sqrt{3}\lambda, \sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda)$．

因为 MP∥平面 B_1AD，所以$\overrightarrow{MP}\cdot\vec{m}=0$，

所以 $-2\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}\lambda+\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda=0$，解得 $\lambda=\frac{1}{2}$，又因为 MP⊄平面 B_1AD，

所以在线段 B_1C 上存在点 P，使得 MP∥平面 B_1AD，$\frac{B_1P}{B_1C}=\frac{1}{2}$．…（14 分）



18.【解答】（I）f（x）=x^2－ax+lnx，a∈R．定义域为（0，+∞），

导数 $f'(x)=2x-a+\frac{1}{x}$，$a\in R$.

依题意，f′（1）=0.

所以 f′（1）=3－a=0，

解得 a=3；

（II）a=3 时，f（x）=lnx+x^2－3x，定义域为（0，+∞），

f′（x）=$\frac{1}{x}$+2x－3=$\frac{1+2x^2-3x}{x}$，

当 0＜x＜$\frac{1}{2}$或 x＞1 时，f′（x）＞0，

当$\frac{1}{2}$＜x＜1 时，f′（x）＜0，

故 f（x）的单调递增区间为（0，$\frac{1}{2}$），（1，+∞），单调递减区间为（$\frac{1}{2}$，1）；

（III）由 f（x）＞0，得 a＜$\frac{lnx+x^2}{x}$在 x＞1 时恒成立，

令 g（x）=$\frac{lnx+x^2}{x}$，则 g′（x）=$\frac{1+x^2-lnx}{x^2}$，

令 h（x）=1+x^2－lnx，则 h′（x）=2x－$\frac{1}{x}$=$\frac{2x^2-1}{x}$，

所以 h（x）在（1，+∞）为增函数，h（x）＞h（1）=2＞0.

故 g’（x）＞0，故 g（x）在（1，+∞）为增函数，即有 g（x）＞g（1）=1，

所以 a≤1，即实数 a 的取值范围为（－∞，1].

19.【解答】（Ⅰ）依题意，椭圆的焦点为 $F_1(-\sqrt{2},\ 0)$，$F_2(\sqrt{2},\ 0)$，则|DF_1|+|DF_2|=2a，

解得 $\begin{cases}a=2\\c=\sqrt{2}\end{cases}$，所以 $b^2=a^2-c^2=2$.

故椭圆C的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$．…（5分）

（Ⅱ）（i）证明：设P（x_0，y_0），A（x_1，y_1），B（$-x_1$，$-y_1$），则$\frac{x_0^2}{4}+\frac{y_0^2}{2}=1$，$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{2}=1$．

两式作差得$\frac{x_0^2-x_1^2}{4}+\frac{y_0^2-y_1^2}{2}=0$．

因为直线PA，PB的斜率都存在，所以$x_0^2-x_1^2\neq 0$．

所以$\frac{y_0^2-y_1^2}{x_0^2-x_1^2}=-\frac{1}{2}$，即$\frac{y_0+y_1}{x_0+x_1}\times\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}=-\frac{1}{2}$．

所以，当PA，PB的斜率都存在时，$k_{PA}\cdot k_{PB}=-\frac{1}{2}$．…（9分）

（ii） 证明：k=0时，P（x_0，y_0），A（-2，0），B（2，0）．

设PA的斜率为n，则PB的斜率为$-\frac{1}{2n}$，

直线PA：y=n（x+2），M（3，5n），

直线PB：$y=-\frac{1}{2n}(x-2)$，$N(3,\ -\frac{1}{2n})$，

所以直线BM：y=5n（x-2），直线AN：$y=-\frac{1}{10n}(x+2)$，

联立，可得交点$Q(\frac{2(50n^2-1)}{50n^2+1},\ \frac{-20n}{50n^2+1})$．

因为$[\frac{2(50n^2-1)}{50n^2+1}]^2+2(\frac{-20n}{50n^2+1})^2=4$，

所以点$Q(\frac{2(50n^2-1)}{50n^2+1},\ \frac{-20n}{50n^2+1})$在椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1$上．

即直线MB与直线NA的交点Q在椭圆上，即A，Q，N三点共线．…（14分）

20.【解答】（I）$a_{15}=22$，$a_{53}=52$，$a_{66}=122$．…（4分）

（II）I=20，j=3．…（8分）

（III）位于从左上角到右下角的对角线上的方格内的数字组成的数列是2，10，26，50，b_n是依（II）中排法的第2n-1组的中间一个数，即第n个数，

所以$b_n=（2n-1）^2-n-2（n-1）=4n^2-4n+2=4n（n-1）+2$，n=1，2，3，…；

因为$c_n=\frac{1}{2^n}-\frac{4}{b_{n+1}-2}$所以$c_n=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{n(n+1)}(n\in N^*)$，

故$S_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2^n}(n\in N^*)$．…（10分）

因为 $c_1=0$，$c_2>0$，$c_3>0$，$c_4>0$；当 $n\geqslant 5$ 时，$c_n=\frac{1}{n(n+1)}[\frac{n(n+1)}{2^n}-1]$，

而 $[\frac{n(n+1)}{2^n}-1]-[\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}-1]=\frac{n(n+1)}{2^n}-\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}=\frac{(n+1)(n-2)}{2^{n+1}}>0$

得 $\frac{n(n+1)}{2^n}\leqslant\frac{5(5+1)}{2^5}<1$，

所以当 $n\geqslant 5$ 时，$c_n<0$，

综上对任意 $n\in N^*$ 恒有 $S_4\geqslant S_n$，故 $k=4$．…（13 分）