2015 北京昌平高三二模

数　　学（文）

第Ⅰ卷（共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集 $U=\{1,2,3,4,5,6\}$，集合 $M=\{2,3,5\}$，$N=\{4,5\}$，则集合 $C_U(M\cup N)$ 中元素的个数是(　　)

A．0 个　　B．1 个　　C．2 个　　D．3 个

2. $|\dfrac{4}{1-\mathrm{i}}|$ 等于(　　)

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{2}$

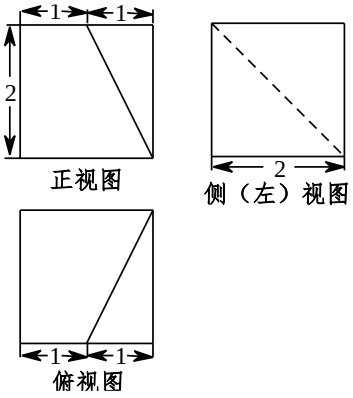
3. 设 $a=4^{\frac{1}{2}},b=\log_2\dfrac{1}{4},c=(\dfrac{1}{3})^2$，则 a,b,c 的大小关系是(　　)

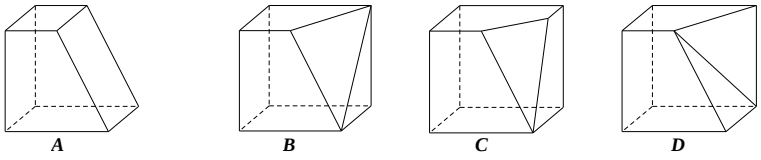
A. $a>c>b$　　B. $a>b>c$　　C. $b>a>c$　　D. $c>a>b$

4. 已知 ΔABC 是等腰直角三角形，D 是斜边 BC 的中点，$AB=2$，则 $\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}$ 等于(　　)

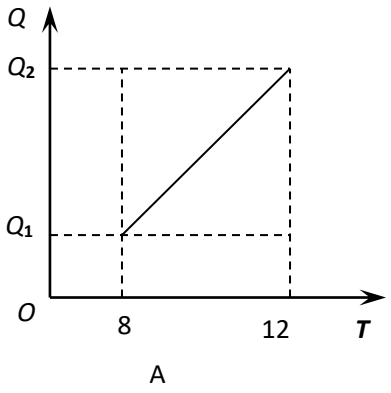
A．2　　B．$2\sqrt{2}$　　C．4　　D．$\sqrt{6}$

5. 若某几何体的三视图如图所示，则此几何体的直观图是(　　)

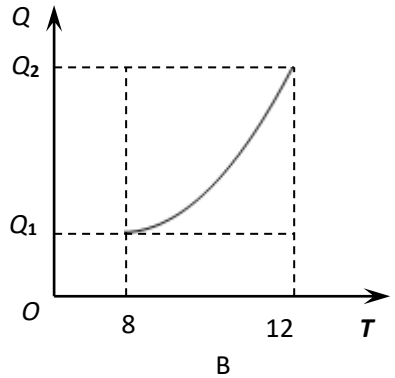




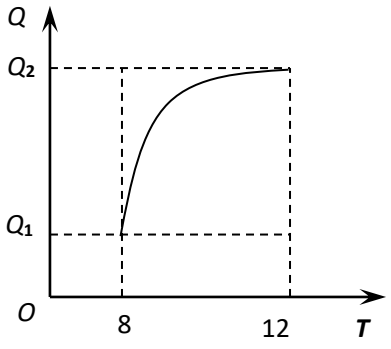
6. 水厂监控某一地区居民用水情况，该地区 A,B,C,D 四个小区在 8:00—12:00 时用水总量 Q 与时间 t 的函数关系如图所示，在这四个小区中，单位时间内用水量逐步增加的是(　　)



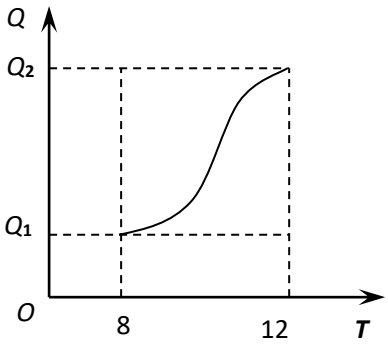
A



B



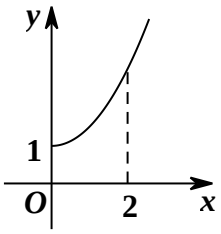
C



D

7. 已知函数 $y=f(x)$（$x\in\mathrm{R}$）是偶函数，其部分图象如图所示，则在 $(-2,0)$ 上与函数 $f(x)$ 的单调性相同的是（　　）

A. $y=-x^2+1$　　B. $y=\cos x$　　C. $y=\begin{cases}e^{-x},x\geq 0\\ e^{x},x<0\end{cases}$　　D. $y=\log_2|x|$



8. 已知四面体 $A-BCD$ 满足下列条件：

（1）有一个面是边长为 1 的等边三角形；　（2）有两个面是等腰直角三角形.

那么符合上述条件的所有四面体的体积的不同值有（　　）

A．1 个　　B．2 个　　C．3 个　　D．4 个

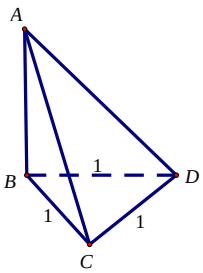


图1

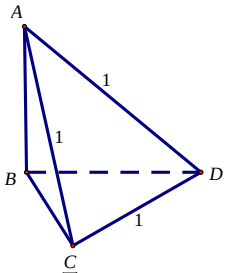


图2

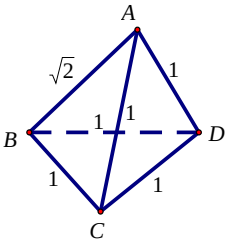
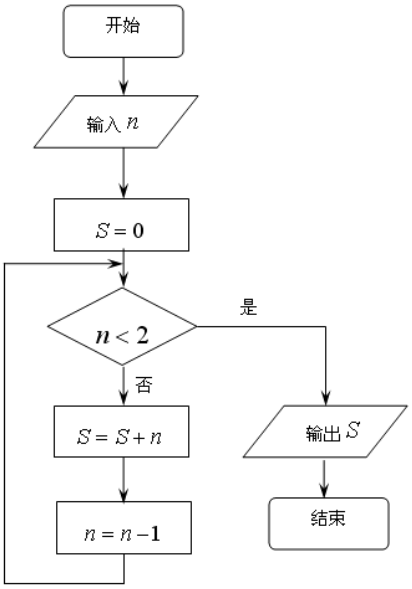


图3



第Ⅱ卷（共 110 分）

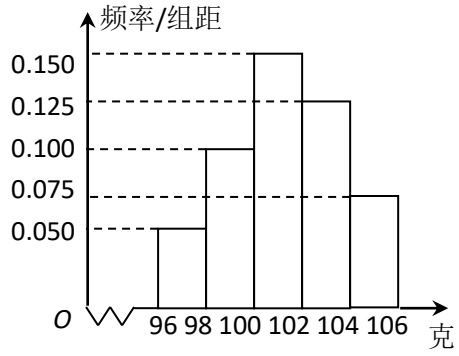
二、填空题（每题 5 分，满分 30 分，将答案填在答题纸上）

9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2^x,x\leq 1\\ -x,x>1\end{cases}$，若 $f(x)=2$，则 $x=$_____.

10. 执行右面的程序框图，如果输入的 $n=5$，那么输出的 S 的值为_____.

11. 某工厂对一批产品进行了抽样检测. 右图是根据抽样检测后的　产品净重（单位：　　克），数据绘制的频率分布直方图，其中产品净重的范围是[96，106]，样本数据分组为[96，98)，[98，100)，[100，102)，[102，

104)，[104，106]，已知样本中产品净重小于 100 克的个数是 36，则样本中$[98,104)$的产品的个数是_____.



12. 数列$\{a_n\}$中，如果$a_{n+1}=a_n-\frac{3}{2}\ (n\in\mathbf{N}^*)$，且$a_1=\frac{1}{2}$，那么数列$\{a_n\}$的前 5 项的和$S_5$的值为_____.

13. 已知圆$(x+1)^2+(y-1)^2=5$经过椭圆$C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点$F$和上顶点$B$，则椭圆$C$的离心率为_____.

14. 点P到曲线C上每一个点的距离的最小值称为点P到曲线C的距离. 已知点$P(2,0)$，若点P到曲线C的距离为$\sqrt{3}$. 在下列曲线中：

① $3x^2-y^2=0$，　② $(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=3$，　③ $5x^2+9y^2=45$，　④ $y^2=2x$.

符合题意的正确序号是_____.（写出所有正确的序号）

三、解答题 （本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. ）

15.（本小题满分 13 分）

在ΔABC中，角A,B,C所对的三边分别为a,b,c，　$B=\frac{\pi}{3}$，且$b=3\sqrt{3},a=2.$

（Ⅰ）求$\sin 2A$；

（Ⅱ）求ΔABC的面积.

16.(本小题满分 13 分)

某大学志愿者协会有 10 名同学，成员构成如下表，其中表中部分数据不清楚，只知道从这 10 名同学中随机抽取一位，抽到该名同学为“数学专业”的概率为$\frac{2}{5}$.

专业 性别	中文	英语[来源:学|科|网]	数学	体育
男	n	1	m	1
女	1	1	1	1

（I） 求m,n的值；

（II）现从男同学中随机选取 2 名同学，进行社会公益活动（每位同学被选到的可能性相同），求选出的这 2 名男同学中至少有一位同学是“数学专业”的概率.

17.(本小题满分 13 分)

已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_n=\frac{3a_n}{2}-p$（其中p是不为零的常数），$n\in\mathbf{N}^*$.

（I）证明：数列$\{a_n\}$是等比数列；

（II）当p=1 时，数列$b_{n+1}=b_n+a_n$,且$b_1=2$,求数列$\{b_n\}$的通项公式.

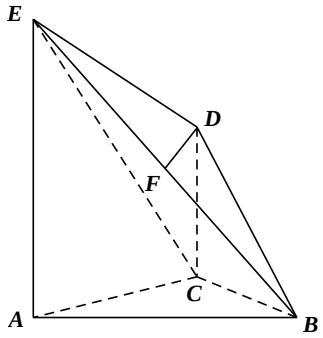
18.（本小题满分 14 分）

在如图所示的几何体中，平面$ACDE \perp$平面ABC，$CD // AE$，F 是 BE 的中点，$\angle ACB = 90^\circ$，$AE = 2CD = 2$，$AC = BC = 1, BE = \sqrt{6}$.

（I） 求证：DF //平面ABC；

（II）求证：$DF \perp$ 平面ABE；

（III）求三棱锥 $D - BC$E 的体积.



19.（本小题共 14 分）

已知椭圆C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，右焦点$F(\sqrt{3},0)$，点$A(\sqrt{3},\frac{1}{2})$在椭圆上.

（I）求椭圆C的标准方程；

(II)若直线$y=kx+m(k\neq 0)$与椭圆C有且只有一个公共点M，且与圆$O: x^2+y^2=a^2+b^2$相交于P,B两点，问$k_{OM}\cdot k_{PB}=-1$是否成立？请说明理由.

20.（本小题共 13 分）

已知函数 $f(x)=a(x-2)^2+2\ln x$.

（Ⅰ）若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上是增函数, 求实数 a 的取值范围;

（III）已知函数 $g(x)=f(x)-4a+\dfrac{1}{4a}\ (a\neq 0)$，当 $x\in[2,+\infty)$ 时, 函数 $g(x)$ 图象上的点均在不等式 $\begin{cases}x\geq 2\\ y\geq x\end{cases}$ 所表示的平面区域内, 求实数 a 的取值范围.

参考答案

第Ⅰ卷（共 40 分）

一、选择题：本大题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 【答案】C

【解析】

试题分析：$M\cup N=\{2,3,4,5\},\therefore \complement_U(M\cup N)=\{1,6\}$.选 C.

考点：集合的基本运算.

2. 【答案】D

【解析】

试题分析：$\frac{4}{1-i}=\frac{4(1+i)}{1+1}=2+2i,\therefore|\frac{4}{1-i}|=|2+2i|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$，选 D.

考点：复数的基本运算.

3. 【答案】A

【解析】

试题分析：$a=2,b=-2,c=\frac{1}{9},\therefore a>c>b$，选 A.

考点：指数运算与对数运算，比较大小.

4. 【答案】C

【解析】

试题分析：$AD=\sqrt{2},(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}=2\times(\sqrt{2})^2=4$，选 C.

考点：向量运算.

5. 【答案】B

【解析】

试题分析：对 A，正视图应为梯形，故 A 错. 对 C，侧视图中的虚线不应为对角线，故 C 错. 对 D，侧视图中的对角线应从左下角到右上角，故 D 错. B 的三视图符合条件，故选 B.

考点：三视图.

6. 【答案】B

【解析】

试题分析：对 A，单位时间内的用水量不变；对 C，单位时间内的用水量不逐渐减少；对 D，单位时间内的用水量前一段时间内逐渐增加，后一段时间内逐渐减少；只有 B，单位时间内的用水量逐渐增加，故选 B.

考点：函数的图象.

7. 【答案】D

【解析】

试题分析：从图象可知，函数 $f(x)$ 在 $(-2,0)$ 上单调递减，所以在 $(-2,0)$ 上与函数 $f(x)$ 的单调性相同的是 $y=\log_2|x|$. 选 D.

考点：函数的图象与性质.

8. 【答案】C

【解析】

试题分析：试题分析：在下图 1 中，$V=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times1=\frac{\sqrt{3}}{12}$. 在下图 2 中，$\Delta ACD$ 是边长为 1 的正三角形，其余三个面都是等腰直角三角形，其直角边为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{24}$. 在下图 3 中，$\Delta ACD$，$\Delta BCD$ 是边长为 1 的正三角形，其余两个面都是等腰直角三角形，其斜边 $AB=\sqrt{2}$，$V=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(\frac{\sqrt{2}}{2})^2\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{12}$. 由此可知选 C.注，算出前面两个即可确定应选 C.

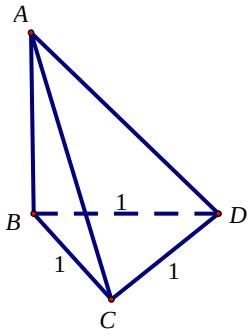


图1

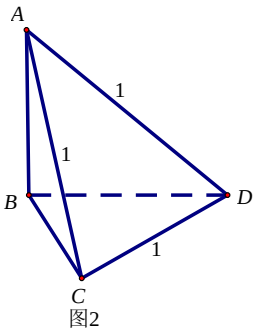


图2

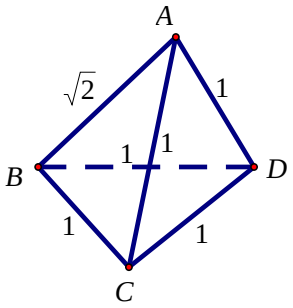


图3

考点：四面体及其体积.

第Ⅱ卷（共 110 分）

二、填空题（每题 5 分，满分 30 分，将答案填在答题纸上）

9. 【答案】1

【解析】

试题分析：由 $2^x=2$ 得 $x=1$. 由 $-x=2$ 得 $x=-2<1$，故舍去. 所以 $x=1$

. 考点：函数与方程.

10. 【答案】14

【解析】

试题分析：这是一个循环结构，循环的结果依次为：

$S=0+5=5,n=4;S=5+4=9,n=3;S=9+3=12,n=2;S=12+2=14,n=1$. 最后输出 14.

考点：程序框图.

11. 【答案】90

【解析】

试题分析：产品净重小于 100 克的频率 $0.05\times2+0.1\times2=0.3$，所以总个数是 $\frac{36}{0.3}=120$. 样本中 $[98,104)$ 的频率为 $0.1\times2+0.125\times2+0.15\times2+=0.75$，所以产品的个数是 $0.75\times120=90$.

考点：频率分布直方图.

12. 【答案】$-\frac{25}{2}$

【解析】

试题分析：这是一个等差数列，其中 $a_1=\frac{1}{2},d=-\frac{3}{2}$，所以 $S_5=5\times\frac{1}{2}+\frac{5\times4}{2}\times(-\frac{3}{2})=-\frac{25}{2}$.

考点：等差数列.

13. 【答案】$\frac{\sqrt{10}}{10}$

【解析】

试题分析：在方程 $(x+1)^2+(y-1)^2=5$ 中，令 $y=0$ 得 $x=1,-3$. 令 $x=0$，得 $y=-1,3$. 据题意得 $c=1,b=3$ 所以 $a=\sqrt{10},e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

考点：圆锥曲线.

14. 【答案】① ② ④

【解析】

试题分析：对①，$3x^2-y^2=0$，$d=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2-4x+4+3x^2}=2\sqrt{x^2-x+1}\geq2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$. 对②，点 P 在圆 $(x+1)^2+(y-\sqrt{3})^2=3$ 外，最小距离为 $d=\sqrt{(2+1)^2+(0-\sqrt{3})^2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$. 对③，方程 $5x^2+9y^2=45$ 表示右焦点为 $P(2,0)$，右顶点为 $A(3,0)$ 的椭圆，根据椭圆的性质知最小距离为 $PA=1$；对④，$d=\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{x^2-4x+4+2x}=\sqrt{x^2-2x+4}=\sqrt{(x-1)^2+3}\geq\sqrt{3}$. 所以符合题意的有① ② ④.[来源:Zxxk.Com]

考点：1、圆锥曲线；2、函数的最小值.

三、解答题 （本大题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

15. 【答案】（I）$\sin2A=\frac{4\sqrt{2}}{9}$；（II）$S_{\Delta ABC}=\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{2}$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,将条件代入即可求得$\sin A=\frac{a\cdot\sin B}{b}=\frac{1}{3}$.再用二倍角公式即可求出$\sin 2A$.(II)由于已知边$b=3\sqrt{3},a=2$.故只需求出角$\sin C$，即可求出面积. $\sin C=\sin(A+B)$，将条件代入即可.

试题解析：（Ⅰ） 由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$,得$\sin A=\frac{a\cdot\sin B}{b}=\frac{1}{3}$.

因为$a<b$，所以$A<B$，则$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin 2A=2\sin A\cos A=\frac{4\sqrt{2}}{9}$. ……7 分

(II)由$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$,

$27=4+c^2-2c$，解得$c=1+2\sqrt{6},\ c=1-2\sqrt{6}$（舍），

故$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{2}$. ……13 分

法二：因为$a<b$，所以$A<B$，则$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\sin C=\sin(\pi-A-B)=\sin(\frac{2\pi}{3}-A)=\sin\frac{2\pi}{3}\cos A-\cos\frac{2\pi}{3}\sin A,$

$\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2\sqrt{6}+1}{6}$,

由$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，得$c=1+2\sqrt{6},$

$\therefore\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot\sin B=\frac{\sqrt{3}+6\sqrt{2}}{2}$. ……13 分

考点：1、三角恒等变换；2、解三角形.

16. 【答案】（Ⅰ）$m=3$，$n=1$.（II）$p=\frac{4}{5}$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）由题意可知，“数学专业”的学生共有$(1+m)$人．从 10 位学生中随机抽取一位，抽到该名同学为“数学专业”的概率为$P(A)=\frac{1+m}{10}=\frac{2}{5}$．解得 $m=3$，进而得$n=10-9=1$．（II）由题意及（Ⅰ）可知，男生共有 6 人，其中数学专业有 3 人，将这 6 人分别记为a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6．其中数学专业的男生为a_4,a_5,a_6.将从中任意抽取 2 位的所有可能结果一一列出，再将其中至少有一位同学是“数学专业”的结果，二者相除即得所求概率.

试题解析：（Ⅰ）设事件A：从 10 位学生中随机抽取一位，抽到该名同学为“数学专业”.

由题意可知，“数学专业”的学生共有$(1+m)$人.

则$P(A)=\frac{1+m}{10}=\frac{2}{5}$．解得 $m=3$.

所以$n=1$. ……6 分

（II）由题意可知，男生共有 6 人，分别记为a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6．其中数学专业的男生为a_4,a_5,a_6．

从中任意抽取 2 位，可表示为$a_1a_2,a_1a_3,a_1a_4,a_1a_5,a_1a_6$， $a_2a_3,a_2a_4,a_2a_5,a_2a_6$，

a_3a_4,a_3a_5,a_3a_6， a_4a_5,a_4a_6， a_5a_6，共15种可能．

设事件B：选出的这 2 名男同学中至少有一位同学是“数学专业”．

事件B包括：a_1a_4,a_1a_5,a_1a_6， a_2a_4,a_2a_5,a_2a_6， a_3a_4,a_3a_5,a_3a_6， a_4a_5,a_4a_6， a_5a_6，共 12 种可能．[来源:Zxxk.Com]

所以至少有一位同学是“数学专业”的概率是$P(B)=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$．　　……13 分

考点：古典概型.

17. 【答案】（I）详见解析；（II）$b_n=1+3^{n-1}$, $n\in\mathbf{N}^*$.

【解析】

试题分析：（I）要证明其为等比数列，需证明$\frac{a_n}{a_{n-1}}$为常数，为此应利用条件$S_n=\frac{3a_n}{2}-p$及$a_n=S_n-S_{n-1}$消去S_n，得到a_n,a_{n-1}间的关系.（II）将$p=1$代入$S_n=\frac{3a_n}{2}-p$可得$a_1=2$，从而得$a_n=2\times3^{n-1}$，所以$b_{n-1}-b_n=2\cdot3^{n-1}$，用叠加法即可得数列$\{b_n\}$的通项公式.

试题解析：（I）在数列$\{a_n\}$中，$S_n=\frac{3a_n}{2}-p$

当$n=1$时，$a_1=2p$

当$n\geq2$时，$a_n=S_n-S_{n-1}=(\frac{3}{2}a_n-\frac{p}{2})-(\frac{3}{2}a_{n-1}-\frac{p}{2})$

所以$\frac{1}{2}a_n=\frac{3}{2}a_{n-1}$，故$\frac{a_n}{a_{n-1}}=3$

所以数列$\{a_n\}$是以$2p$为首项，以 3 为公比的等比数列.　……7 ≫

（II）当$p=1$时，$a_1=2$，$\therefore a_n=2\cdot3^{n-1}$

因为$b_{n-1}=b_n+a_n$，

所以$b_{n-1}-b_n=2\cdot3^{n-1}$，

所以$b_2-b_1=2\cdot3^0$

$b_3-b_2=2\cdot3^1$

$b_4-b_3=2\cdot3^2$

……

$b_n-b_{n-1}=2\cdot3^{n-2}$,

以上各式叠加得：　所以$b_n-b_1=2\cdot3^0+2\cdot3^1+2\cdot3^2+\cdots+2\cdot3^{n-2}$,

所以$b_n=\frac{2(1-3^{n-1})}{1-3}+2=3^{n-1}-1, b_1=2$.

又因为 当$n=1$时，$b_1=2$符合上式.

所以$b_n=1+3^{n-1}, n\in\mathbf{N}^*$. ……13 分

考点：1、等比数列；2、递推公式；3、叠加法.

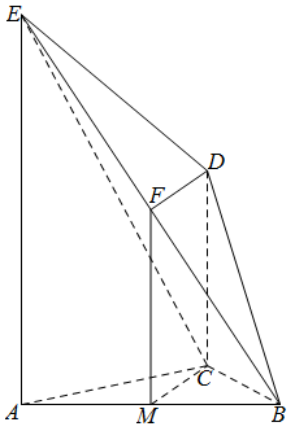
18. 【答案】（Ⅰ）详见解析；（Ⅱ）详见解析；（Ⅲ）$V=\frac{1}{6}$.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）设 M 为AB中点，连结FM,CM. 通过平行四边形可证得$DF//CM$，从而得DF// 平面ABC.（Ⅱ）由于$DF//CM$，故只需证明CM ⊥平面ABE即可. 首先根据题中所给数据用勾股定理可证得$AE\perp AB$. 又因为平面$ACDE$⊥平面ABC，平面$ACDE\cap$平面$ABC=AC$. $\angle ACB=90^\circ$，所以$AC\perp BC$.

所以BC⊥平面$ACDE$，从而得$BC\perp AE$. 这样由$AE\perp AB$，$BC\perp AE$得AE⊥平面ABC，故$AE\perp CM$. 在ΔABC中，因为$AC=BC$, M 为AB中点，所以CM ⊥AB. 所以CM ⊥平面ABE，从而问题得证.（Ⅲ）由（Ⅱ）可知BC⊥平面$ACDE$. 所以BC为三棱锥$B-CDE$的高，这样以 B 为顶点，易得该三棱锥的体积.

试题解析：（Ⅰ）证明：设 M 为AB中点，连结FM,CM.



在ΔABE中，F 为BE中点，$FM//AE, FM=\frac{1}{2}AE$.

又因为$CD//AE$, 且$CD=\frac{1}{2}AE$,

所以$CD//FM, CD=FM$.

所以 四边形$CDFM$为平行四边形.

故$DF//CM$，$DF\not\subset$平面ABC，$CM\subset$平面ABC,

所以DF// 平面ABC. ……5 分

（Ⅱ）证明：在$Rt\Delta ABC$中，$AC=BC=1, \therefore AB=\sqrt{2}$.

在ΔABE中，$AE=2$, $BE=\sqrt{6}$, $AB=\sqrt{2}$.

因为$BE^2=AE^2+AB^2$.［来源:学科网］

所以ΔABE为直角三角形.

所以 $AE \perp AB$.

又因为平面 $ACDE \perp$ 平面 ABC，平面 $ACDE \cap$ 平面 $ABC = AC$.

又因为 $\angle ACB = 90^\circ$，所以 $AC \perp BC$.

故 $BC \perp$ 平面 $ACDE$.

即 $BC \perp AE$.

$BC \cap AB = B$,

所以 $AE \perp$ 平面 ABC，$CM \subset$ 平面 ABC.

故 $AE \perp CM$.

在 ΔABC 中，因为 $AC = BC$, M 为 AB 中点,

所以 $CM \perp AB$.

$AE \cap AB = A$,

所以 $CM \perp$ 平面 ABE.

由（Ⅰ）知 $DF // CM$，

所以 $DF \perp$ 平面 ABE. ……11 分

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知 $BC \perp$ 平面 $ACDE$.

所以 BC 为三棱锥 $B-CDE$ 的高,

所以 $V_{D-BCE} = V_{B-CDE} = \frac{1}{3} S_{\Delta CDE} BC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$. ……14 分

考点：1、空间直线与平面的位置关系；2、三棱锥的体积.

19. 【答案】（Ⅰ）$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$；（Ⅱ）不成立.

【解析】

试题分析：（Ⅰ）已知椭圆 C 的右焦点 $F(\sqrt{3}, 0)$，所以 $c = \sqrt{3}$. 又因为椭圆经过点 $A(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$，将坐标代入方程得 $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1$，与 $a^2 = b^2 + 3$ 联立解方程组即得椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.（Ⅱ）显然 $k_{PB} = k \neq 0$，故只需考查 $k_{OM} \cdot k$ 的值，看其是否能等于 1. 因为直线与椭圆 C 有且只有一个公共点，则 $\Delta = 0$. 联立方程组 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$ (*) 可得点 M 的坐标，从而得 k_{OM}，据此即可判定 $k_{OM} \cdot k_{PB} = -1$ 是否成立.

试题解析：（Ⅰ）因为椭圆 C 的右焦点 $F(\sqrt{3}, 0)$，经过点 $A(\sqrt{3}, \frac{1}{2})$

$$\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{1}{4b^2} = 1 \\ c = \sqrt{3} \\ a^2 + b^2 = c^2 \end{cases}$$，解得 $a^2 = 4$，$b^2 = 1$.

所以椭圆 C 的方程是 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ ． ．……5 分

（II）不成立 ．……6 分

由（I）知，圆 $C_1:x^2+y^2=5$

因为直线与椭圆 C 有且只有一个公共点 M ．

所以方程组 $\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{4}+y^2=1\end{cases}$ (*)

有且只有一组解.

由(*)得 $(4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0$. 从而

$\Delta=16(4k^2-m^2+1)=0$ 化简得 $m^2=1+4k^2$ ①

$x_M=-\frac{4km}{4k^2+1}$， $y_M=kx_M+m=\frac{m}{1+4k^2}$． ②

所以点 M 的坐标为 $(-\frac{4km}{1+4k^2},\frac{m}{1+4k^2})$.

由于 $k_{PB}=k\neq 0$，由①可知 $m\neq 0$，

所以 $k_{OM}\times k_{PB}=\frac{\frac{m}{1+4k^2}}{-\frac{4km}{1+4k^2}}\times k=-\frac{1}{4}\neq -1$，

$k_{OM}\cdot k_{PB}=-1$ 不成立. ……14 分

考点：直线与圆锥曲线.

20. 【答案】（I）函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，无单调递减区间；（II）实数 a 的取值范围是 $-\frac{1}{8}\le a\le 1$；

（III）实数 a 的取值范围是 $0<a\le\frac{1}{2e}$ ·

【解析】

试题分析：（I）将 $a=1$ 代入函数解析式，求导即可得其单调区间．（II）求导得 $f'(x)=2ax-4a+\frac{2}{x}=\frac{2ax^2-4ax+2}{x}(a\neq 0),x\in[1,4]$． $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上是增函数，则 $f'(x)\ge 0$ 在区间 $[1,4]$ 上恒成立，即 $2ax^2-4ax+2\ge 0$ 在 $[1,4]$ 上恒成立. 只需函数 $h(x)=2ax^2-4ax+2$ 在 $[1,4]$ 上的最小值大于等于零即可.（III）函数 $g(x)$ 图象上的点均在不等式 $\begin{cases}x\ge 2\\ y\ge x\end{cases}$ 所表示的平面区域内，则 $g(x)\ge x$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立. 令 $p(x)=g(x)-x=a(x-2)^2+2\ln x-4a+\frac{1}{4a}-x$，则 $p(x)_{\min}\ge 0$ 在 $[2,+\infty)$ 上成立即可．求导得 $p'(x)=2ax-4a+\frac{2}{x}-1=\frac{(x-2)(2ax-1)}{x}$. 由于 $x\ge 2$，所以 $\frac{x-2}{x}\ge 0$，故只需考虑 $2ax-1$ 的符号. 首先要考虑 x

的系数的符号，故分 $a\le 0, a>0$ 两大类. 当 $a\le 0$ 时，$2ax-1<0$. 当 $a>0$ 时，由 $2ax-1<0$ 得 $x<\frac{1}{2a}$. 由于 $x\ge 2$，

故要考虑 $\frac{1}{2a}$ 是大于 2 还是小于 2. 由 $\frac{1}{2a}=2$ 得 $a=\frac{1}{4}$，所以再以 $\frac{1}{4}$ 为界分情况讨论.

试题解析：（I）当 $a=1$ 时，$f(x)=(x-2)^2+2\ln x$，定义域 $(0,+\infty)$.

$$f'(x)=2x-4+\frac{2}{x}=\frac{2(x-1)^2}{x},$$

因为 $x>0$，所以 $f'(x)\ge 0$.

所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(0,+\infty)$，无单调递减区间. .....3 分

（II）$f'(x)=2ax-4a+\frac{2}{x}=\frac{2ax^2-4ax+2}{x}(a\ne 0), x\in[1,4]$.

因为 $f(x)$ 在区间 $[1,4]$ 上是增函数，

所以 $f'(x)\ge 0$ 在区间 $[1,4]$ 上恒成立，即 $2ax^2-4ax+2\ge 0$ 在 $[1,4]$ 上恒成立.

（i）当 $a=0$ 满足题意

（ii）令 $h(x)=2ax^2-4ax+2$，则 $h(x)=2a(x-1)^2-2a+2$，对称轴 $x=1$.

① 当 $a>0$ 时，只需 $h(1)\ge 0$，即 $-2a+2\ge 0$，解得 $0<a\le 1$.

② 当 $a<0$ 时，只需 $h(4)\ge 0$，即 $16a+2\ge 0$，解得 $-\frac{1}{8}\le a<0$.

综上，实数 a 的取值范围是 $-\frac{1}{8}\le a\le 1$ .....7 分

（III）依题意，$g(x)\ge x$ 在 $[2,+\infty)$ 上恒成立.

令 $p(x)=g(x)-x=a(x-2)^2+2\ln x-4a+\frac{1}{4a}-x$，则 $p(x)_{\min}\ge 0$ 在 $[2,+\infty)$ 上成立即可.

$$p'(x)=2ax-4a+\frac{2}{x}-1=\frac{(x-2)(2ax-1)}{x},$$

① 当 $a\le 0$ 时，

因为 $x>2$，所以 $x-2>0, 2ax-1<0,$

则 $p'(x)<0$，$p(x)$ 在 $[2,+\infty)$ 上是单调递减，

且 $p(4)=2\ln 4-4+\frac{1}{4a}<0$，所以不满足 $p(x)_{\min}\ge 0$，则 $a\le 0$ 不成立.

② 当$0<a<\frac{1}{4}$时，$2<\frac{1}{2a}$.

令$p'(x)>0$,则递增区间是$\left(\frac{1}{2a},+\infty\right)$，令$p'(x)<0$,则递减区间是$\left(2,\frac{1}{2a}\right)$.

所以$p(x)_{\min}=p(\frac{1}{2a})=a(\frac{1}{2a}-2)^2+2\ln\frac{1}{2a}-4a+\frac{1}{4a}-\frac{1}{2a}=-2-2\ln 2a.$

$-2-2\ln 2a\geq 0$，解得$a\leq\frac{1}{2e}$，

所以$0<a\leq\frac{1}{2e}$.

③当$a\geq\frac{1}{4}$时，$2\geq\frac{1}{2a}$.

令$p'(x)>0$,则递增区间是$[2,+\infty)$.所以$p(x)_{\min}=p(2)=2\ln 2-4a+\frac{1}{4a}-2.$

因为$a\geq\frac{1}{4}$，所以$\frac{1}{4a}\leq 1,-4a\leq -1$,则$-4a+\frac{1}{4a}\leq 0,\ 2\ln 2-2<0$，

所以$p(x)_{\min}=p(2)<0$,不满足$p(x)_{\min}\geq 0$，则$a\geq\frac{1}{4}$不成立,

综上，实数a的取值范围是$0<a\leq\frac{1}{2e}$. .....13 分

考点：导数及其应用.