2015 北京丰台高三二模

数　　学（理）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．（5 分）已知 A={x|x＞1}，B={x|x^2－2x＜0}，则 A∪B=（　　）

A．{x|x＜0 或 x≥1}　B．{x|1＜x＜2}　C．{x|x＜0 或 x＞1}　D．{x|x＞0}

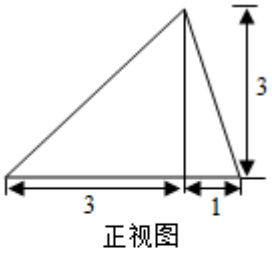
2．（5 分）“a=0”是“复数 z=a+bi（a，b∈R）为纯虚数”的（　　）

A．充分不必要条件　B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

3．（5 分）直线 y=x+4 与曲线 y=x^2－x+1 所围成的封闭图形的面积为（　　）

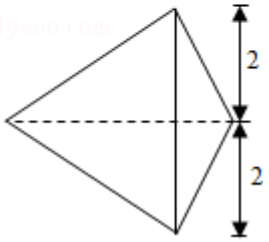
A．$\frac{22}{3}$　B．$\frac{28}{3}$　C．$\frac{32}{3}$　D．$\frac{34}{3}$



正视图

4．（5 分）函数 f（x）=$\begin{cases}\sqrt{x}-1, & x\geqslant 0\\ 2\cos x-1, & -2\pi\leqslant x<0\end{cases}$的所有零点的和等于（　　）

A．1－2π　B．1－$\frac{3\pi}{2}$　C．1－π　D．1－$\frac{\pi}{2}$



俯视图

5．（5 分）某三棱锥的正视图和俯视图如图所示，则其左视图面积为（　　）

A．6　B．$\frac{9}{2}$　C．3　D．$\frac{3}{2}$

6．（5 分）平面向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是$\frac{\pi}{3}$，且$|\vec{a}|$=1，$|\vec{b}|$=2，如果$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}-3\vec{b}$，D 是 BC 的中点，那么$|\overrightarrow{AD}|$=（　　）

A．$\sqrt{3}$　B．$2\sqrt{3}$　C．3　D．6

7．（5 分）某生产厂家根据市场调查分析，决定调整产品生产方案，准备每周（按 5 天计算）生产 A，B，C 三种产品共 15 吨（同一时间段内只能生产一种产品），已知生产这些产品每吨所需天数和每吨产值如表：

产品名称	A	B	C
天	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
产值（单位：万元）	4	$\frac{7}{2}$	2

则每周最高产值是（　　）

A．30　B．40　C．47.5 D．52.5

8．（5 分）抛物线 y^2=4x 的焦点为 F，经过 F 的直线与抛物线在 x 轴上方的部分相交于点 A，与准线 l 交于点 B，且 AK⊥l 于 K，如果|AF|=|BF|，那么△AKF 的面积是（　　）

A．4　B．$3\sqrt{3}$　C．$4\sqrt{3}$　D．8

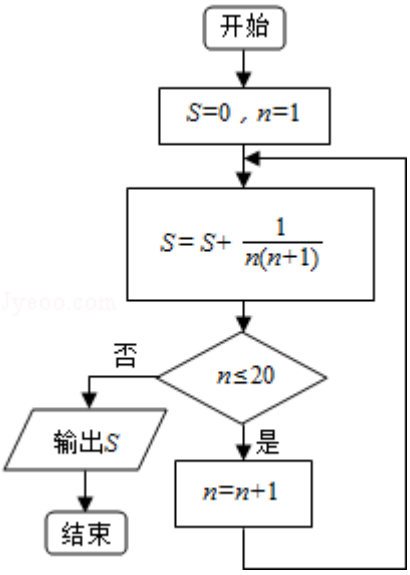
二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.（5 分）已知正实数 x，y 满足 xy=3，则 2x+y 的最小值是_____.

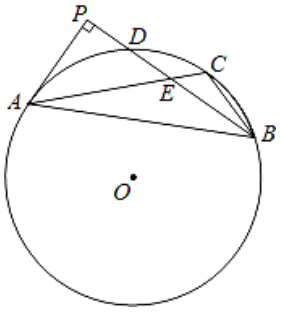
10.（5 分）直线 l 的斜率是 - 1，且过曲线$\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\y=3+2\sin\theta\end{cases}$（θ 为参数）的对称中心，则直线 l 的方程是_____.

11.（5 分）已知函数 f（x）=$\frac{1}{2}\sin 2x+\sqrt{3}\cos^2 x$，则 f（x）的最小正周期是_____；如果 f（x）的导函数是 f′（x），则 f′（$\frac{\pi}{6}$）=_____.

12.（5 分）执行如图所示的程序框图，则输出的结果是_____.



13.（5 分）如图所示，△ABC 内接于⊙O，PA 是⊙O 的切线，PB⊥PA，BE=PE=2PD=4，则 PA=_____，AC=_____.



14.（5 分）已知非空集合 A，B 满足以下四个条件：①A∪B={1，2，3，4，5，6，7}；②A∩B=∅；③A 中的元素个数不是 A 中的元素；④B 中的元素个数不是 B 中的元素.

（ⅰ）如果集合 A 中只有 1 个元素，那么 A=_____；

（ⅱ）有序集合对（A，B）的个数是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（13 分）在△ABC 中，A=30°，BC=$2\sqrt{5}$，点 D 在 AB 边上，且∠BCD 为锐角，CD=2，△BCD 的面积为 4.

（Ⅰ）求 cos∠BCD 的值；

（Ⅱ）求边 AC 的长.

16.（13 分）长时间用手机上网严重影响着学生的健康，某校为了解 A，B 两班学生手机上网的时长，分别从这两个班中随机抽取 6 名同学进行调查，将他们平均每周手机上网时长作为样本数据，绘制成茎叶图如图所示（图中的茎

表示十位数字，叶表示个位数字）．如果学生平均每周手机上网的时长超过 21 小时，则称为“过度用网”．

（Ⅰ）请根据样本数据，分别估计 A，B 两班的学生平均每周上网时长的平均值；

（Ⅱ）从 A 班的样本数据中有放回地抽取 2 个数据，求恰有 1 个数据为“过度用网”的概率；

（Ⅲ）从 A 班、B 班的样本中各随机抽取 2 名学生的数据，记“过度用网”的学生人数为 ξ，写出 ξ 的分布列和数学期望 Eξ．

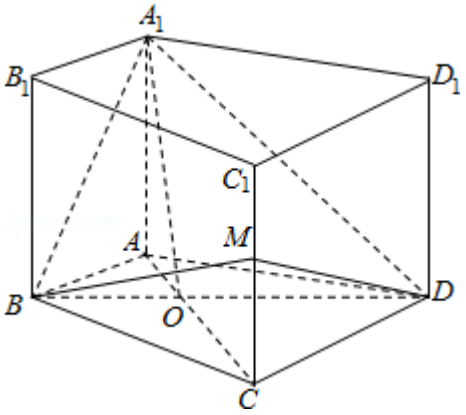
A班			B班		
	9	0			
3	1	1	1	2	
4	0	2	1	5	7
	7	3	6		

17．（14 分）如图所示，在四棱柱 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 中，AA_1⊥底面 ABCD，BD⊥AC 于 O，且 AA_1=OC=2OA=4，点 M 是棱 CC_1 上一点．

（Ⅰ）如果过 A_1，B_1，O 的平面与底面 ABCD 交于直线 l，求证：l∥AB；

（Ⅱ）当 M 是棱 CC_1 中点时，求证：A_1O⊥DM；

（Ⅲ）设二面角 A_1－BD－M 的平面角为 θ，当$|\cos\theta|=\frac{2\sqrt{5}}{25}$时，求 CM 的长．



18．（13 分）已知数列{a_n}满足 a_1=10，$a_n=\begin{cases}2^{a_{n-1}}, & n=2k\\ -1+\log_2 a_{n-1}, & n=2k+1\end{cases}$（$n\in N^*$），其前 n 项和为 S_n．

（Ⅰ）写出 a_3，a_4；

（Ⅱ）求数列的通项公式；

（Ⅲ）求 S_n 的最大值．

19．（14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的焦距为 2，其两个焦点与短轴的一个顶点是正三角形的三个顶点．

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）动点 P 在椭圆 C 上，直线 l：x=4 与 x 轴交于点 N，PM⊥l 于点 M（M，N 不重合），试问在 x 轴上是否存在定点 T，使得∠PTN 的平分线过 PM 中点，如果存在，求定点 T 的坐标；如果不存在，说明理由．

20.（13 分）已知函数 f（x）=$\frac{\ln ax+1}{x}$（a＞0）.

（Ⅰ）求函数 f（x）的最大值；

（Ⅱ）如果关于 x 的方程 lnx+1=bx 有两解，写出 b 的取值范围（只需写出结论）；

（Ⅲ）证明：当 k∈N^*且 k≥2 时，$\ln\frac{k}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}<\ln k$.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】由集合 B 中的不等式 $x^2-2x<0$，即 $x(x-2)<0$，

解得：$0<x<2$，即 $B=\{x|0<x<2\}$，

又 $A=\{x|x>1\}$，

则 $A\cup B=\{x|x>0\}$，

故选：D

2.【解答】依题意，

复数 $z=a+bi$（a，$b\in R$）为纯虚数，

$\Leftrightarrow a=0$ 且 $b\neq 0$，

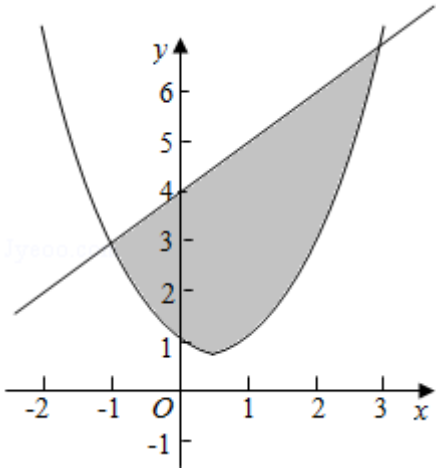
∴“a=0”是“复数 $z=a+bi$（a，$b\in R$）为纯虚数”的必要不充分条件，

故选 B.

3.【解答】直线 $y=x+4$ 与曲线 $y=x^2-x+1$ 所围成的封闭图形如图阴影部分，两个交点分别为（-1，3），（3，7），

其面积为 $\int_{-1}^{3}(x+4-x^2+x-1)dx=\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx=(-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x)\big|_{-1}^{3}=\frac{32}{3}$；

故选：C.



4.【解答】当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}-1=0$，解得 x=1，

当 $-2\pi\leqslant x<0$ 时，$f(x)=2\cos x-1=0$，解得 $\cos x=\frac{1}{2}$，$x=-\frac{\pi}{3}$，或 $x=-\frac{5\pi}{3}$，

∴$1-\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}=1-2\pi$

所以所有零点的和等于 $1-2\pi$，

故选：A

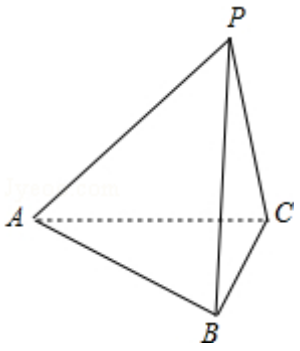
5.【解答】根据题意，得：

该三棱锥的直观图如图所示，

∴该三棱锥的左视图为三角形，

其面积为$\frac{1}{2}\times2\times3=3$.

故选：C.



6.【解答】由已知，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{a}-3\vec{b}$，D 是 BC 的中点，那么$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(2\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}-\vec{b}$；

又平面向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角是$\frac{\pi}{3}$，且$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=2$，

所以$(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=1+4-2\times1\times2\times\cos\frac{\pi}{3}=3$，

所以$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{3}$；

故选：A.

7.【解答】设每周生产 A 产品 x 吨，B 产品 y 吨，则生产 C 产品 15 - x - y 吨，产值为 z.

目标函数为 $z=4x+\frac{7}{2}y+2(15-x-y)=2x+\frac{3}{2}y+30$，

题目中包含的约束条件为：

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}(15-x-y)\leqslant5\\0\leqslant15-x-y\leqslant15\\0\leqslant x\leqslant15\\0\leqslant y\leqslant15\end{cases}$$，即$$\begin{cases}3x+y-15\leqslant0\\0\leqslant x+y\leqslant15\\0\leqslant x\leqslant15\\0\leqslant y\leqslant15\end{cases}$$

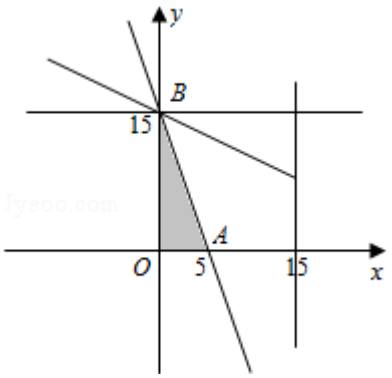
可行域如图所示：

化目标函数 z=2x+$\frac{3}{2}$y+30 为 $y=\frac{4}{3}x+\frac{z}{3}-20$.

由图可知，当直线 $y=\frac{4}{3}x+\frac{z}{3}-20$ 过 B（0，15）时，直线在 y 轴上的截距最大，

z 有最大值为 $2\times0+\frac{3}{2}\times15+30=52.5$.

故选：D.



8.【解答】抛物线 $y^2=4x$ 的焦点 F（1，0），准线为 l：x=－1，

由抛物线的定义可得|AF|=|AK|，

由直角三角形的斜边上的中线等于斜边的一半，可得|FK|=|AF|，

即有△AKF 为正三角形，

由 F 到 l 的距离为 d=2，

则|AK|=4，

△AKF 的面积是 $\frac{\sqrt{3}}{4}\times16=4\sqrt{3}$.

故选：C.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】由正实数 x，y 满足 xy=3，得到 y=$\frac{3}{x}$，所以 $2x+y=2x+\frac{3}{x}\geqslant2\sqrt{2x\times\frac{3}{x}}=2\sqrt{6}$.

当且仅当 x=$\frac{\sqrt{6}}{2}$时取等号.

所以 2x+y 的最小值是 $2\sqrt{6}$.

故答案为：$2\sqrt{6}$.

10.【解答】根据曲线 $\begin{cases}x=2+2\cos\theta\\y=3+2\sin\theta\end{cases}$（θ 为参数），

得（x－2）^{2}+（y－3）^{2}=4，

其对称中心为（2，3），

根据点斜式方程，得

y－3=－（x－2），

∴直线 l 的方程 x+y﹣5=0，

故答案为：x+y﹣5=0.

11.【解答】函数 f（x）=$\frac{1}{2}$sin2x+$\sqrt{3}$cos^{2}x=$\frac{1}{2}$sin2x+$\sqrt{3}$•$\frac{1+\cos 2x}{2}$=sin（2x+$\frac{\pi}{3}$）+$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故函数 f（x）的周期为$\frac{2\pi}{2}$=π，

f（x）的导函数是 f′（x）=2cos（2x+$\frac{\pi}{3}$），故 f′（$\frac{\pi}{6}$）=2cos$\frac{2\pi}{3}$=﹣1，

故答案为：π；﹣1.

12.【解答】模拟执行程序框图，可得程序框图的功能是计算并输出 S=$\frac{1}{1\times 2}$+$\frac{1}{2\times 3}$+$\frac{1}{3\times 4}$+…+$\frac{1}{20\times 21}$+$\frac{1}{21\times 22}$的值.

由于 S=$\frac{1}{1\times 2}$+$\frac{1}{2\times 3}$+$\frac{1}{3\times 4}$+…+$\frac{1}{20\times 21}$+$\frac{1}{21\times 22}$=1﹣$\frac{1}{2}$+$\frac{1}{2}$﹣$\frac{1}{3}$+$\frac{1}{3}$﹣$\frac{1}{4}$+…+$\frac{1}{21}$﹣$\frac{1}{22}$=1﹣$\frac{1}{22}$=$\frac{21}{22}$.

故答案为：$\frac{21}{22}$.

13.【解答】由题意，PD=DE=2，

∵PA 是⊙O 的切线，

∴由切割线定理可得 PA^2=PD•PB=2×8=16，∴PA=4，

∵PB⊥PA，∴AE=4$\sqrt{2}$，

由相交弦定理可得 CE=$\frac{DE\cdot BE}{AE}$=$\frac{2\times 4}{4\sqrt{2}}$=$\sqrt{2}$，

∴AC=AE+CE=5$\sqrt{2}$.

故答案为：4；5$\sqrt{2}$.

14.【解答】（ⅰ）如果集合 A 中只有 1 个元素，

若 A={1}，则不满足条件．③，

若 A={2}，则 B={1，3，4，5，6，7}，含有 6 个元素，不满足条件④.

若 A={3}，则 B={1，2，4，5，6，7}，含有 6 个元素，不满足条件④.

若 A={4}，则 B={1，2，3，5，6，7}，含有 6 个元素，不满足条件④.

若 A={5}，则 B={1，2，3，4，6，7}，含有 6 个元素，不满足条件④.

若 A={6}，则 B={1，2，3，4，5，7}，含有 6 个元素，满足条件.

若 A={7}，则 B={1，2，3，4，5，6}，含有 6 个元素，不满足条件④.

故 A={6}；

（ii）若集合 A 中只有 1 个元素，则集合 B 中只有 6 个元素，则 1∉A，6∉B，

即 6∈A，1∈B，此时有C_5^0=1，

若集合 A 中只有 2 个元素，则 2∉A，5∉B，

即 5∈A，2∈B，则有C_5^1=5，

若集合 A 中只有 3 个元素，则集合 B 中只有 4 个元素，则 3∉A，4∉B，

即 4∈A，3∈B，此时有C_5^2=10，

若集合 A 中只有 4 个元素，则集合 B 中只有 3 个元素，则 4∉A，3∉B，

即 3∈A，4∈B，此时有C_5^3=10，

若集合 A 中只有 5 个元素，则集合 B 中只有 2 个元素，则 5∉A，2∉B，

即 2∈A，5∈B，此时有C_5^4=5，

若集合 A 中只有 6 个元素，则集合 B 中只有 1 个元素，则 6∉A，1∉B，

即 1∈A，6∈B，此时有C_5^5=1，

故有序集合对（A，B）的个数是 1+5+10+10+1=32，

故答案为：{6}；32

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.【解答】（Ⅰ）∵BC=2$\sqrt{5}$，CD=2，$S_{\triangle BCD}$=$\frac{1}{2}$BC•CD•sin∠BCD=4，

∴sin∠BCD=$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

∵∠BCD 为锐角，

∴cos∠BCD=$\sqrt{1-(\frac{2\sqrt{5}}{5})^2}$=$\frac{\sqrt{5}}{5}$；

（Ⅱ）在△BCD 中，CD=2，BC=2$\sqrt{5}$，cos∠BCD=$\frac{\sqrt{5}}{5}$，

由余弦定理得：$DB^2=CD^2+BC^2-2CD•BC•\cos∠BCD=4+20-8=16$，即 DB=4，

∵$DB^2+CD^2=BC^2$，

∴∠CDB=90°，即△ACD 为直角三角形，

∵A=30°，

∴AC=2CD=4.

16.【解答】（Ⅰ）A 班样本数据的平均值为$\frac{1}{6}$（9+11+13+20+24+37）=19，

由此估计 A 班学生每周平均上网时间 19 小时；

B 班样本数据的平均值为$\frac{1}{6}$（11+12+21+25+27+36）=22，

由此估计 B 班学生每周平均上网时间 22 小时．　　…（2 分）

（Ⅱ）因为从 A 班的 6 个样本数据中随机抽取 1 个的数据，为“过度用网”的概率是$\frac{1}{3}$，

所以从 A 班的样本数据中有放回的抽取 2 个的数据，恰有 1 个数据为“过度用网”的概率为 P=$C_2^1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$ ═．　　…（5 分）

（Ⅲ）ξ 的可能取值为 0，1，2，3，4．

P（ξ=0）=$\frac{C_4^2 C_3^2}{C_6^2 C_6^2}=\frac{2}{25}$，P（ξ=1）=$\frac{C_4^1 C_2^1 C_3^2+C_4^2 C_3^1 C_3^1}{C_6^2 C_6^2}=\frac{26}{75}$，P（ξ=2）=$\frac{C_2^2 C_3^2+C_4^2 C_3^2+C_4^1 C_2^1 C_3^1 C_3^1}{C_6^2 C_6^2}=\frac{31}{75}$，

P（ξ=3）=$\frac{C_2^2 C_3^2 C_3^1+C_4^1 C_2^1 C_3^2}{C_6^2 C_6^2}=\frac{11}{75}$，P（ξ=4）=$\frac{C_2^2 C_3^2}{C_6^2 C_6^2}=\frac{1}{75}$．

ξ 的分布列是：

ξ	0	1	2	3	4
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{26}{75}$	$\frac{31}{75}$	$\frac{11}{75}$	$\frac{1}{75}$

Eξ=0×$\frac{2}{25}$+1×$\frac{26}{75}$+2×$\frac{31}{75}$+3×$\frac{11}{75}$+4×$\frac{1}{75}$=$\frac{5}{3}$．　　…（13 分）

17.【解答】（Ⅰ）因为 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 是棱柱，

所以 A_1B_1BA 是平行四边形．

所以 A_1B_1∥AB．

因为 A_1B_1⊄平面 ABCD，AB⊂平面 ABCD，

所以 A_1B_1∥平面 ABCD．

因为平面 A_1BO∩平面 ABCD=l，

所以 l∥A_1B_1．

所以 l∥AB．

（Ⅱ）因为 DB⊥AC 于 O，如图建立空间直角坐标系．

因为 AA_1=4，且 OC=2AO=4，

所以 O（0，0，0），C（4，0，0），A（－2，0，0），A_1（－2，0，4）．

因为 M 是棱 CC_1 中点，

所以 M（4，0，2）．

设 D（0，b，0），

所以$\overrightarrow{DM}$=（4，﹣b，2），$\overrightarrow{OA_1}$=（﹣2，0，4）.

所以$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{OA_1}$=﹣8+0+8=0.

所以$A_1O\perp DM$.

（Ⅲ）设D（0，b，0），B（0，c，0），平面A_1BD的法向量为$\vec{\pi}$=（x，y，z），

又因为$\overrightarrow{A_1D}$=(2，b，-4)，$\overrightarrow{A_1B}$=(2，c，-4)，

所以$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1D}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x+by-4z=0\\ 2x+cy-4z=0\end{cases}$.

因为$b\neq c$，

所以y=0，令z=1，

则x=2，所以$\vec{\pi}$=（2，0，1）.

设M（4，0，h），所以$\overrightarrow{MD}$=（﹣4，b，﹣h），$\overrightarrow{MB}$=(-4，c，-h).

设平面MBD的法向量为$\vec{n}$=（x，y，z），

所以$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{MD}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{MB}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-4x+by-hz=0\\ -4x+cy-hz=0\end{cases}$.

因为$b\neq c$，所以y=0，令z=1，

则x=$-\frac{h}{4}$，所以$\vec{n}$=（$-\frac{h}{4}$，0，1）.

又因为$|\cos\theta|=\frac{2\sqrt{5}}{25}$，

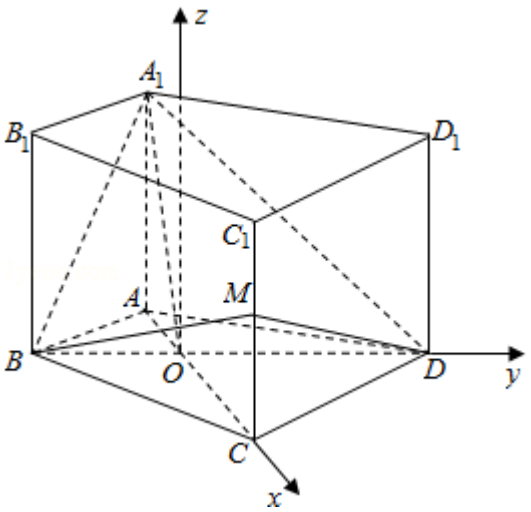
所以$|\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle|=\frac{2\sqrt{5}}{25}$，

即$\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\frac{|1-\frac{h}{2}|}{\sqrt{5}\times\sqrt{\frac{h^2}{16}+1}}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$.

解得h=3或$h=\frac{7}{6}$.

所以点M（4，0，3）或M（4，0，$\frac{7}{6}$）.

所以CM=3或$CM=\frac{7}{6}$.



18.【解答】（Ⅰ）因为 $a_1=10$，

所以 $a_2=2^{a_1}=2^{10}$，

$a_3=-1+\log_2 a_2=-1+\log_2 2^{10}=9$，

$a_4=2^9$.

（Ⅱ）当 n 为奇数时，$a_n=-1+\log_2 a_{n-1}=-1+\log_2 2^{a_{n-2}}=a_{n-2}-1$，

即 $a_n-a_{n-2}=-1$.

所以$\{a_n\}$的奇数项成首项为 $a_1=10$，公差为 -1 的等差数列.

所以当 n 为奇数时，$a_n=a_1+\left(\frac{n-1}{2}\right)\cdot(-1)=\frac{21-n}{2}$

当 n 为偶数时，$a_n=2^{a_{n-1}}=2^{\frac{21-(n-1)}{2}}=2^{11-\frac{n}{2}}$

所以 $a_n=\begin{cases}2^{11-\frac{n}{2}}, & n=2k\\ \frac{21-n}{2}, & n=2k-1\end{cases}$（$k\in N^*$），

（Ⅲ）因为偶数项 $a_n=2^{11-\frac{n}{2}}>0$，奇数项 $a_n=\frac{21-n}{2}$为递减数列，

所以 S_n取最大值时 n 为偶数.

令 $a_{2k}+a_{2k-1}\geqslant 0$（$k\in N^*$），即 $2^{11-k}+\frac{21-2k+1}{2}\geqslant 0$.

所以 $2^{11-k}\geqslant k-11$.

得 $k\leqslant 11$.

所以 S_n的最大值为 $S_{22}=(2^{10}+2^9+\cdots+2^1+2^0)+(10+9+\cdots+0)$

$=\frac{1-2^{11}}{1-2}+\frac{1}{2}\times(1+10)\times 10=2102$.

19.【解答】（Ⅰ）由椭圆 C 的焦距 2c=2，解得 c=1，

因为两个焦点与短轴的一个顶点构成正三角形，

所以 b=$\sqrt{3}$c=$\sqrt{3}$，a=$\sqrt{b^2+c^2}$=2，

所以椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（Ⅱ）假设存在点 T，使得∠PTN 的平分线过 PM 中点.

设 P（x_0，y_0），T（t，0），PM 中点为 S.

因为 PM⊥l 于点 M（M，N 不重合），且∠PTN 的平分线过 S，

所以∠PTS=∠STN=∠PST.

又因为 S 为 PM 的中点，

所以|PT|=|PS|=$\frac{1}{2}$|PM|.

即$\sqrt{(x_0-t)^2+(y_0-0)^2}=\frac{1}{2}|x_0-4|$.

因为点 P 在椭圆 C 上，所以 $y_0^2=3(1-\frac{x_0^2}{4})$，

代入上式可得 $2x_0(1-t)+(t^2-1)=0$.

因为对于任意的动点 P，∠PTN 的平分线都过 S，

所以此式对任意 $x_0\in(-2,2)$ 都成立.

所以$\begin{cases}1-t=0\\t^2-1=0\end{cases}$，

解得 t=1.

所以存在定点 T，使得∠PTN 的平分线过 PM 中点，

此时定点 T 的坐标为（1，0）.

20.【解答】（Ⅰ）函数 f（x）=$\frac{\ln ax+1}{x}$（a＞0）的定义域为{x|x＞0}.

∵f（x）=$\frac{\ln ax+1}{x}$，

∴f′（x）=$\frac{-\ln ax}{x^2}$；

∵a＞0，且当 f′（x）=0 时，x=$\frac{1}{a}$；

当 x∈（0，$\frac{1}{a}$）时，f′（x）＞0，f（x）在（0，$\frac{1}{a}$）上单调递增；

当 x∈（$\frac{1}{a}$，+∞）时，f′（x）＜0，f（x）在（$\frac{1}{a}$，+∞）上单调递减.

所以当 $x=\frac{1}{a}$ 时，$f(x)_{max}=f(\frac{1}{a})=a$.

（Ⅱ）结合（Ⅰ）知，当 $0<b<1$ 时，方程 $\ln x+1=bx$ 有两解；

（Ⅲ）证明：由（Ⅰ）得 $\frac{\ln x+1}{x}\leqslant 1$，

即 $1-x\leqslant \ln\frac{1}{x}$，（当 $x=1$ 时，等号成立）；

则 $1-\frac{1}{2}<\ln 2$，$1-\frac{2}{3}<\ln\frac{3}{2}$，…，$1-\frac{k-1}{k}<\ln\frac{k}{k-1}$，

则当 $k\in N$ 且 $k\geqslant 2$ 时，

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}<\ln k$；

由（Ⅰ）得 $\frac{\ln x+1}{x}\leqslant 1$，

即 $\ln x\leqslant x-1$，（当 $x=1$ 时，等号成立），

则 $\ln\frac{3}{2}<\frac{3}{2}-1$，$\ln\frac{4}{3}<\frac{4}{3}-1$，…$\ln\frac{k+1}{k}<\frac{k+1}{k}-1$，

则当 $k\in N$ 且 $k\geqslant 2$ 时，$\ln\frac{k}{2}<\ln\frac{k+1}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}$；

综上所述，当 $k\in N$ 且 $k\geqslant 2$ 时，

$\ln\frac{k}{2}<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{k}<\ln k$.