2015 北京丰台高三二模

数　　学（文）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1.（5 分）在复平面内，复数 i•（1 - i）对应的点位于（　　）

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

2.（5 分）已知 a＞0 且 a≠1，命题“∃x＞1，$\log_a x$＞0”的否定是（　　）

A. ∃x≤1，$\log_a x$＞0　B. ∃x＞1，$\log_a$≤0　C. ∀x≤1，$\log_a x$＞0　D. ∀x＞1，$\log_a x$≤0

3.（5 分）已知函数 f（x）=|sinx|，x∈[- 2π，2π]，则方程 f（x）=$\frac{1}{2}$的所有根的和等于（　　）

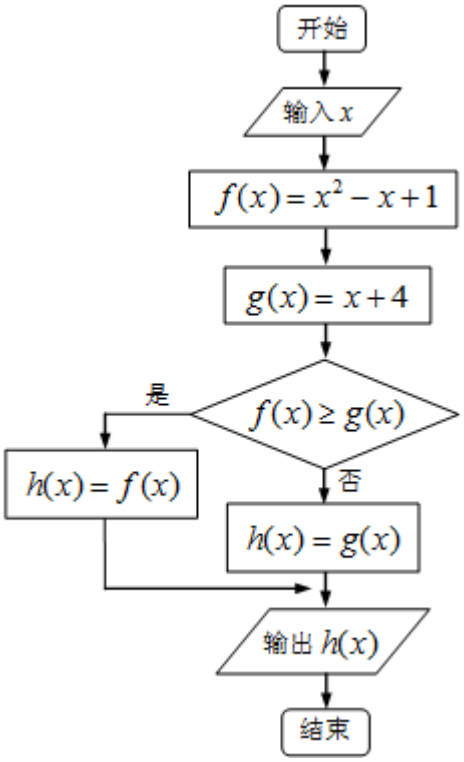
A. 0　　B. π　　C. - π　D. - 2π

4.（5 分）如图所示，某三棱锥的正视图、俯视图均为边长为 2 的正三角形，则其左视图面积为（　　）



A. 2　　B. $\sqrt{3}$　C. $\frac{3}{2}$　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5.（5 分）执行如图所示的程序框图，如果输入的 x∈R，则输出的 h（x）的最小值是（　　）

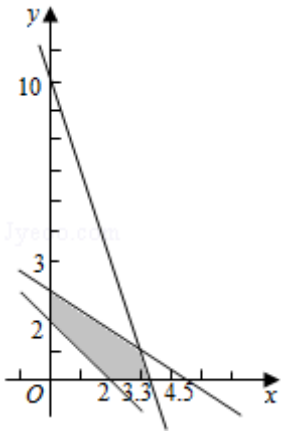


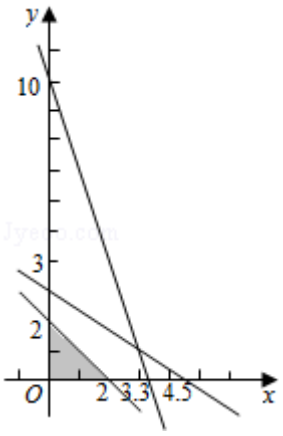
A. $\frac{3}{4}$　　B. 3　　C. 4　　D. 7

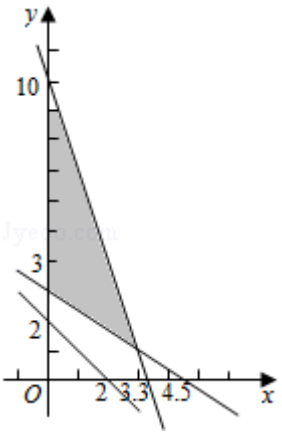
6.（5 分）设 O 是坐标原点，F 是抛物线 $y=x^2$ 的焦点，A 是抛物线上的一点，FA 与 x 轴正向的夹角为$\frac{\pi}{6}$，则$|\overrightarrow{AF}|$=（　　）

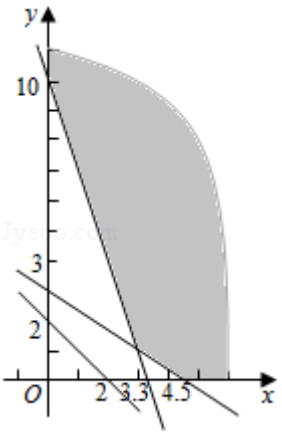
A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{3}{4}$　　C. 1　　D. 2+$\sqrt{3}$

7.（5 分）某工厂生产甲、乙两种产品，已知生产每吨甲种产品要用 A 原料 3 吨，B 原料 2 吨；生产每吨乙种产品要用 A 原料 1 吨，B 原料 3 吨．该工厂每天生产甲、乙两种产品的总量不少于 2 吨，且每天消耗的 A 原料不能超过 10 吨，B 原料不能超过 9 吨．如果设每天甲种产品的产量为 x 吨，乙种产品的产量为 y 吨，则在坐标系 xOy 中，满足上述条件的 x，y 的可行域用阴影部分表示正确的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

8.（5 分）对于集合 A、B，定义 A+B={x+y|x∈A，y∈B}，下列命题：

①A+B=B+A；

②（A+B）+C=A+（B+C）；

③若 A+A=B+B，则 A=B；

④若 A+C=B+C，则 A=B.

其中正确的命题是（　　）

A．①　B．①②　C．②③　D．①④

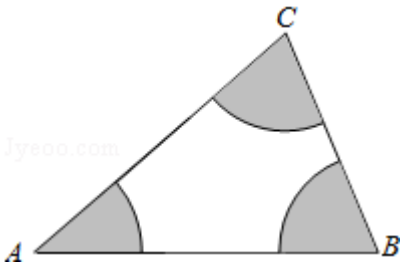
二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9.（5 分）已知正实数 x，y 满足 xy=3，则 2x+y 的最小值是_____.

10.（5 分）曲线 $y=x^3-x^2-x+1$ 在点（0，1）处的切线方程是_____.

11.（5 分）在锐角△ABC 中，$AB=2\sqrt{5}$，AC=2，△ABC 的面积是 4，则 sinA=_____，BC=_____.

12.（5 分）如图所示，分别以 A，B，C 为圆心，在△ABC 内作半径为 2 的扇形（图中的阴影部分），在△ABC 内任取一点 P，如果点 P 落在阴影内的概率为$\frac{1}{3}$，那么△ABC 的面积是_____.



13.（5 分）已知两点 A（－m，0），B（m，0）（m＞0），如果在直线 3x+4y+25=0 上存在点 P，使得∠APB=90°，则 m 的取值范围是_____.

14.（5 分）已知梯形 ABCD 中，AD=DC=CB=$\frac{1}{2}$AB，P 是 BC 边上一点，且$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$．当 P 是 BC 中点时，x+y=_____；当 P 在 BC 边上运动时，x+y 的最大值是_____.

三、解答题（共 6 小题，满分 80 分）

15.（13 分）已知函数 f（x）=$2\cos^2$（ωx+$\frac{\pi}{12}$）（其中 ω＞0，x∈R）的最小正周期为 2π．

（Ⅰ）求 ω 的值；

（Ⅱ）如果 α∈[0，$\frac{\pi}{2}$]，且 f（α）=$\frac{8}{5}$，求 cosα 的值．

16.（13 分）已知等差数列{a_n}的前 n 项和为 S_n，等比数列{b_n}满足 $a_1=b_1=1$，$S_3=b_3+2$，$S_5=b_5-1$．

（Ⅰ）求数列{a_n}，{b_n}的通项公式；

（Ⅱ）如果数列{b_n}为递增数列，求数列{a_nb_n}的前 n 项和 T_n．

17.（13 分）长时间用手机上网严重影响着学生的身体健康，某校为了解 A，B 两班学生手机上网的时长，分别从这两个班中随机抽取 5 名同学进行调查，将他们平均每周手机上网的时长作为样本，绘制成茎叶图如图所示（图中的茎表示十位数字，叶表示个位数字）．

（Ⅰ）分别求出图中所给两组样本数据的平均值，并据此估计，哪个班的学生平均上网时间较长；

（Ⅱ）从 A 班的样本数据中随机抽取一个不超过 21 的数据记为 a，从 B 班的样本数据中随机抽取一个不超过 21 的数据记为 b，求 a＞b 的概率．

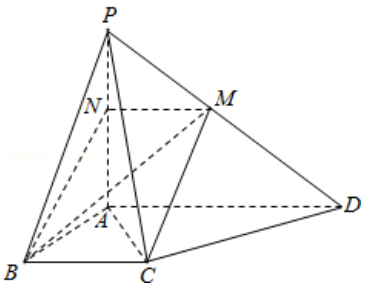
A班			B班		
	9	0			
4	1	1	1	2	
	0	2	1	5	6
	1	3			

18.（14 分）如图所示，四棱锥 P－ABCD 的底面 ABCD 是直角梯形，BC∥AD，AB⊥AD，AB=BC=$\frac{1}{2}$AD，PA⊥底面 ABCD，过 BC 的平面交 PD 于 M，交 PA 与 N（M 与 D 不重合）．

（Ⅰ）求证：MN∥BC；

（Ⅱ）求证：CD⊥PC；

（Ⅲ）如果 BM⊥AC，求此时$\frac{PM}{PD}$的值．



19.（13 分）已知函数 f（x）=x^2e^x．

（Ⅰ）求 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）证明：∀x_1，x_2∈（－∞，0]，f（x_1）－f（x_2）≤$\frac{4}{e^2}$；

（Ⅲ）写出集合{x∈R|f（x）－b=0}（b 为常数且 b∈R）中元素的个数（只需写出结论）．

20.（14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的右焦点为 F（$\sqrt{3}$，0），上下两个顶点与点 F 恰好是正三角形的三个顶点.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）过原点 O 的直线 l 与椭圆交于 A，B 两点，如果△FAB 为直角三角形，求直线 l 的方程.

参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1.【解答】∵i•（1﹣i）=1+i，∴复数　i•（1﹣i）对应的点的坐标为（1，1），显然位于第一象限，

故选 A.

2.【解答】命题“∃x＞1，$\log_a x$＞0”是特称命题，

其否定是全称命题：“∀x＞1，$\log_a x$≤0”.

故选：D.

3.【解答】作出函数 f（x）的图象，则函数 f（x）为偶函数，图象关于 y 轴对称，

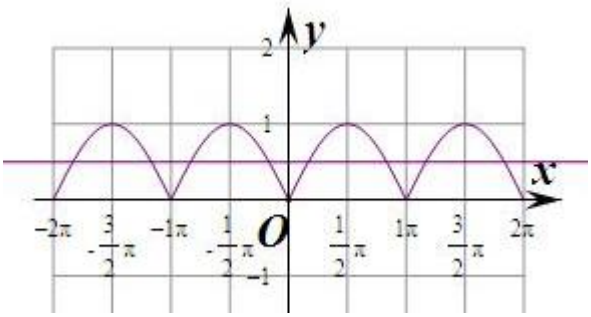
若 f（x）=$\frac{1}{2}$，

即|sinx|=$\frac{1}{2}$，

则两个图象共有 8 个交点，则两两关于 y 轴对称，

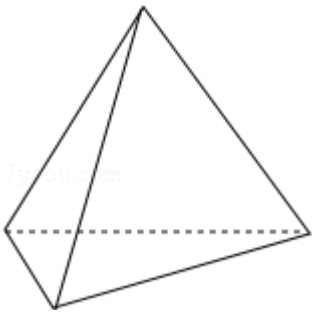
∴所有根的和为 0，

故选：A



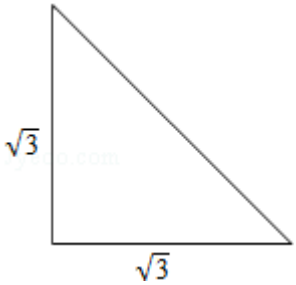
4.【解答】∵三棱锥的正视图、俯视图均为边长为 2 的正三角形，

则三棱锥的直观图如下所示：



故三棱锥的左视图是一个直角边长为$\sqrt{3}$的等腰直角三角形，

如下图所示：

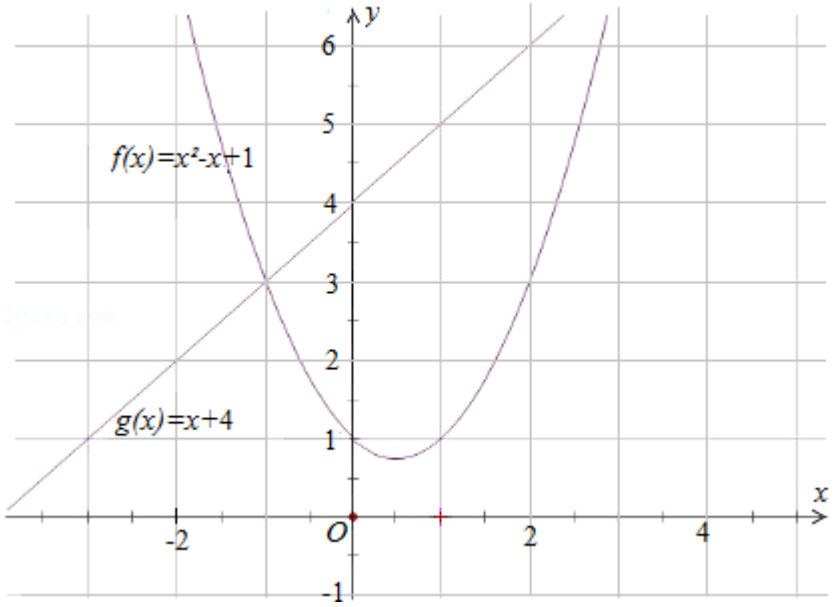


故左视图面积为：$\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\frac{3}{2}$，

故选：C

5.【解答】当 f（x）≥g（x）时，有 $x^2-x+1\geq x+4$，解得：$x\leq -1$ 或 $x\geq 3$，有 h（x）$=x^2-x+1$ 的最小值为 3.

当 f（x）＜g（x）时，有 $x^2-x+1<x+4$，解得：$-1<x<3$，有 h（x）$=x+4$ 的最小值为 3.



故选：B.

6.【解答】根据题意，不妨设 A 为第一象限的点，则直线的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+\frac{1}{4}$，

与抛物线方程联立，整理可得$\sqrt{3}x^2-x-\frac{\sqrt{3}}{4}=0$，

解可得 A（$\frac{\sqrt{3}}{2}$，$\frac{3}{4}$），所以$|\overrightarrow{AF}|=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$，

故选：C.

7.【解答】由题可知$\begin{cases}x+y\geqslant 2\\3x+y\leqslant 10\\2x+3y\leqslant 9,\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$

故选：A.

8.【解答】对于①，集合 A、B 满足 A+B={x+y|x∈A，y∈B}，

∴B+A={y+x|y∈B，x∈A}={x+y|x∈A，y∈B}=A+B，∴①正确；

对于②，（A+B）+C={x+y+z|x∈A，y∈B，z∈C}

A+（B+C）={x+y+z|x∈A，y∈B，z∈C}，

∴（A+B）+C=A+（B+C），②正确；

对于③，当 A={1，5}，B={2，4}时，满足$\{x_1+x_2|x_1\in A，x_2\in A\}=\{y_1+y_2|y_1\in B，y_2\in B\}$，

但 A=B 不成立，∴③错误；

对于④，当 A={x|x=2n+1，n∈Z}，B={x|x=2n，n∈Z}，C={x|x=n，n∈Z}时，

满足{x+z|x∈A，z∈C}={y+z|y∈B，z∈C}，

但 A=B 不成立，∴④错误；

综上，以上正确的命题是①②.

故选：B.

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分）

9.【解答】由正实数 x，y 满足 xy=3，得到 $y=\frac{3}{x}$，所以 $2x+y=2x+\frac{3}{x}\geqslant 2\sqrt{2x\times\frac{3}{x}}=2\sqrt{6}$.

当且仅当 $x=\frac{\sqrt{6}}{2}$时取等号.

所以 2x+y 的最小值是 $2\sqrt{6}$.

故答案为：$2\sqrt{6}$.

10.【解答】$y=x^3-x^2-x+1$ 的导数为 $y'=3x^2-2x-1$，

曲线 $y=x^3-x^2-x+1$ 在点（0，1）处的切线斜率为 k=0－0－1=－1，

即有曲线 $y=x^3-x^2-x+1$ 在点（0，1）处的切线方程为 y=－x+1，

即为 x+y－1=0.

故答案为：x+y－1=0.

11.【解答】由已知及三角形面积公式可得：$4=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 2\times \sin A$，

可解得：$\sin A=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由 A 为锐角，可得：$\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

由余弦定理可得：$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos A=20+4-2\times 2\sqrt{5}\times 2\times\frac{\sqrt{5}}{5}=16$，

故 BC=4.

故答案为：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$，4.

12.【解答】由题意知本题是一个几何概型，

∵试验发生包含的所有事件是直角三角形的面积 S，

阴影部分的面积 $S_1=\frac{1}{2}\pi 2^2=2\pi$.

点 P 落在区域 M 内的概率为 $P=\frac{2\pi}{S}=\frac{1}{3}$.

故 $S=6\pi$，

故答案为：6π.

13.【解答】∵P 在直线 3x+4y+25=0 上，设点 P（x，$\frac{-3x-25}{4}$），

∴$\overrightarrow{AP}$=（x+m，$\frac{-3x-25}{4}$），

$\overrightarrow{BP}$=（x－m，$\frac{-3x-25}{4}$）；

又∠APB=90°，

∴$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}$=（x+m）（x－m）+$(\frac{-3x-25}{4})^2$=0，

即 $25x^2+150x+625-16m^2=0$；

∴△≥0，

即 $150^2-4\times 25\times(625-16m^2)\geq 0$，

解得 m≥5，或 m≤－5，

又 m＞0，∴m 的取值范围是[5，+∞）.

故答案为：[5，+∞）.

14.【解答】①以 AB 为 x 轴，过点 A 与 AB 垂直的直线为 y 轴，建立平面直角坐标系，

如图所示；

设 AB=2，则 AD=DC=CB=1，

且 DC∥AB，∴∠BAD=60°；

∴A（0，0），B（2，0），C（$\frac{3}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），D（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）；

∴BC 的中点 P（$\frac{7}{4}$，$\frac{\sqrt{3}}{4}$），

∴$\overrightarrow{AP}$=（$\frac{7}{4}$，$\frac{\sqrt{3}}{4}$），

$\overrightarrow{AB}$=（2，0），$\overrightarrow{AD}$=（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$），

∵$\overrightarrow{AP}$=x$\overrightarrow{AB}$+y$\overrightarrow{AD}$，

∴（$\frac{7}{4}$，$\frac{\sqrt{3}}{4}$）=x（2，0）+y（$\frac{1}{2}$，$\frac{\sqrt{3}}{2}$）=（2x+$\frac{1}{2}$y，$\frac{\sqrt{3}}{2}$y），

∴$\begin{cases}2x+\frac{1}{2}y=\frac{7}{4}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{cases}$，

解得 x=$\frac{3}{4}$，y=$\frac{1}{2}$；

∴x+y=$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{5}{4}$；

②线段 BC 的方程为 y=-$\sqrt{3}$（x-2），（x∈[$\frac{3}{2}$，2]），

设点 P（x_0，-$\sqrt{3}$（x_0-2））x_0∈[$\frac{3}{2}$，2]，

∴$\overrightarrow{AP}$=（x_0，-$\sqrt{3}$（x_0-2）），

$\overrightarrow{AP}$=x$\overrightarrow{AB}$+y$\overrightarrow{AD}$=（2x+$\frac{1}{2}$y，$\frac{\sqrt{3}}{2}$y），

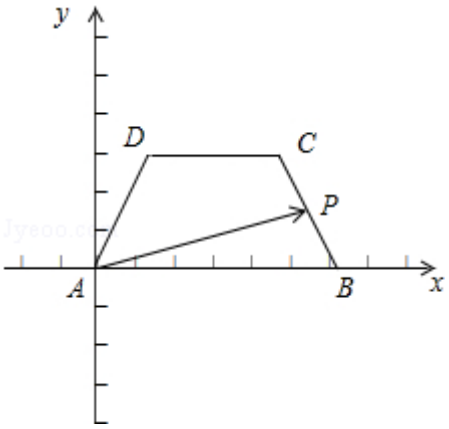
∴$\begin{cases}2x+\frac{1}{2}y=x_0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}y=-\sqrt{3}(x_0-2)\end{cases}$，

解得 x=x_0-1，y=-2x_0+4；

∴x+y=-x_0+3，

∵x_0∈[$\frac{3}{2}$，2]，∴当 x=$\frac{3}{2}$时，x+y=-$\frac{3}{2}$+3=$\frac{3}{2}$为最大值.

故答案为：$\frac{5}{4}$，$\frac{3}{2}$.



三、解答题（共 6 小题，满分 80 分）

15.【解答】（Ⅰ）∵已知函数 f（x）=$2\cos^2$（ωx+$\frac{\pi}{12}$）=cos（2ωx+$\frac{\pi}{6}$）+1 的最小正周期为$\frac{2\pi}{2\omega}$=2π，

∴ω=$\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）由于 α∈[0，$\frac{\pi}{2}$]，且 f（α）=cos（α+$\frac{\pi}{6}$）+1=$\frac{8}{5}$，∴cos（α+$\frac{\pi}{6}$）=$\frac{3}{5}$，∴sin（α+$\frac{\pi}{6}$）=$\frac{4}{5}$，

∴cosα=cos[（α+$\frac{\pi}{6}$）－$\frac{\pi}{6}$]=cos（α+$\frac{\pi}{6}$）cos$\frac{\pi}{6}$+sin（α+$\frac{\pi}{6}$）sin$\frac{\pi}{6}$=$\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4+3\sqrt{3}}{10}$.

16.【解答】（1）∵等比数列{b_n}满足 $a_1=b_1=1$，$S_3=b_3+2$，$S_5=b_5-1$.

$$\therefore\begin{cases}\frac{3(1+1+2d)}{2}=q^2+2\\ \frac{5(1+1+4d)}{2}=q^4-1\end{cases}$$

解得 $q^2=4$，$q^2=-\frac{2}{3}$（舍去）d=1，

q=±2，

当 q=2 时，$a_n=1+n-1=n$，$b_n=2^{n-1}$，

当 q=－2 时，$a_n=1+n-1=n$，$b_n=(\frac{1}{2})^{n-1}=2^{1-n}$

（2）∵数列{b_n}为递增数列，

∴$b_n=2^{n-1}$，$a_n=n$.

∴$a_nb_n=n\cdot2^{n-1}$.

∵前 n 项和 $T_n=1\times2^0+2\times2^1+3\times2^2+4\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-2}+n\cdot2^{n-1}$. ①

$2T_n=1\cdot2^1+2\times2^2+3\times2^3+\cdots+(n-1)\cdot2^{n-1}+n\cdot2^n$，②

①－②：$-T_n=1+2^n-1-n\cdot2^n=(2+2^2+\cdots+2^{n-1})-n\cdot2^n$.

$T_n=1-2^n+n\cdot2^n$

17.【解答】（Ⅰ）A 班样本数据的平均值为$\frac{1}{5}$（9+11+14+20+31）=17，

由此估计 A 班学生每周平均上网时间 17 小时；

B 班样本数据的平均值为$\frac{1}{5}$（11+12+21+25+26）=19，

由此估计 B 班学生每周平均上网时间较长.

（Ⅱ）A 班的样本数据中不超过 21 的数据有 3 个，分别为：9，11，14，

B 班的样本数据中不超过 21 的数据也有 3 个，分别为：11，12，21，

从 A 班和 B 班的样本数据中各随机抽取一个共有：9 种不同情况，

分别为：（9，11），（9，12），（9，21），（11，11），（11，12），（11，21），（14，11），（14，12），（14，21），

其中 a＞b 的情况有（14，11），（14，12）两种，

故 a＞b 的概率 P=$\frac{2}{9}$

18.【解答】（Ⅰ）∵BC∥AD，BC⊄平面 PAD，AD⊂平面 PAD，

∴BC∥平面 PAD，

∵平面 PAD∩平面 BCMN=MN，

∴BC∥MN，即 MN∥BC；

（Ⅱ）取 AD 中点 E，连接 CE，BE，

∵AB=BC=$\frac{1}{2}$AD，

∴四边形 ABCE 为正方形，

∵E 是 AD 的中点，

∴△ACD 是等腰直角三角形，

∴AC⊥CD，即 CD⊥AC，

∵PA⊥底面 ABCD，CD⊂底面 ABCD，

∴PA⊥CD，

∵PA∩AC=A，

∴CD⊥面 PAC，

∵PC⊂面 PAC，

∴CD⊥PC.

（Ⅲ）连接 BE，则 BE∥CD，

∵AC⊥CD，∴AC⊥BE，

若 BM⊥AC，

∵BM∩BE=B，

∴AC⊥面 BEM，

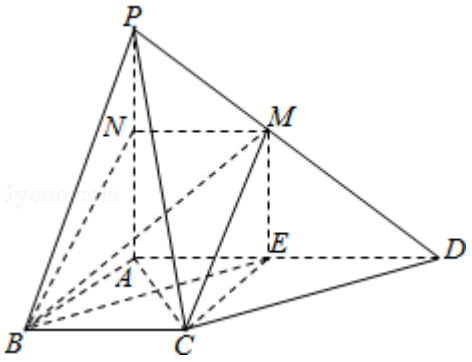
∵ME⊂面 BEM，

∴AC⊥EM，

∵E 是 AD 的中点，

∴M 是 PD 的中点，

即$\frac{PM}{PD}=\frac{1}{2}$.



19.【解答】（Ⅰ）函数 f（x）=x^2e^x的导数 f′（x）=（$2x+x^2$）e^x，

由 f′（x）＞0，可得 x＞0 或 x＜－2，由 f′（x）＜0，可得－2＜x＜0.

则 f（x）的增区间为（－∞，－2），（0，+∞），减区间为（－2，0）；

（Ⅱ）证明：由（Ⅰ）可得 f（x）在（－∞，－2）递增，在（－2，0）递减.

当 x∈（－∞，0]时，f（x）的最大值为 f（－2）=$\frac{4}{e^2}$，

由于 f（x）≥0，则在 x∈（－∞，0]时，f（x）的最小值为 f（0）=0，

则∀x_1，x_2∈（－∞，0]，f（x）的最大值－f（x）的最小值为$\frac{4}{e^2}$，

即有∀x_1，x_2∈（－∞，0]，f（x_1）－f（x_2）≤$f(x)_{max}-f(x)_{min}=\frac{4}{e^2}$；

（Ⅲ）当 b＜0 时，集合{x∈R|f（x）－b=0}的元素个数为 0；

当 b=0 或 b＞$\frac{4}{e^2}$时，集合{x∈R|f（x）－b=0}的元素个数为 1；

当 b=$\frac{4}{e^2}$时，集合{x∈R|f（x）－b=0}的元素个数为 2；

当 0＜b＜$\frac{4}{e^2}$时，集合{x∈R|f（x）－b=0}的元素个数为 3.

20.【解答】（Ⅰ）由题可知 c=$\sqrt{3}$，a=2b，

∵$b^2+c^2=a^2$，∴$a^2=4$，$b^2=1$，

∴椭圆 C 的标准方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（Ⅱ）由题，当△FAB 为直角三角形时，显然过原点 O 的直线 l 斜率存在，

设直线 l 方程为：y=kx，设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）.

①当 FA⊥FB 时，$\overrightarrow{FA}$=（$x_1-\sqrt{3}$，y_1），$\overrightarrow{FB}$=（$x_2-\sqrt{3}$，y_2）.

联立$\begin{cases}y=kx\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$，消去 y 得：$(1+4k^2)x^2-4=0$，

由韦达定理知：$x_1+x_2=0$，$x_1x_2=-\frac{4}{1+4k^2}$，

$\overrightarrow{FA}\cdot\overrightarrow{FB}=(x_1-\sqrt{3},\ kx_1)\cdot(x_2-\sqrt{3},\ kx_2)=x_1x_2-\sqrt{3}(x_1+x_2)+3+k^2x_1x_2=(1+k^2)\cdot(-\frac{4}{1+4k^2})+3=0$，

解得 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$，此时直线 l 的方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$；

②当 FA 与 FB 不垂直时，根据椭圆的对称性，不妨设$\angle FAB=\frac{\pi}{2}$，

即点 A 既在椭圆上又在以 OF 为直径的圆上.

$\therefore\begin{cases}\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1\\ (x_1-\frac{\sqrt{3}}{2})^2+y_1^2=(\frac{\sqrt{3}}{2})^2\end{cases}$，解得 $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$y_1=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$，

∴$k=\frac{y_1}{x_1}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$，此时直线 l 的方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$；

综上所述，直线 l 的方程为：$y=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$ 或 $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x$.