2015 北京东城高三二模

数　　学（理）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1．（5 分）$\sin(-\frac{23\pi}{6})=$（　　）

A．$-\frac{\sqrt{3}}{2}$　B．$-\frac{1}{2}$　C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{\sqrt{3}}{2}$

2．（5 分）设 $a=\log_4\pi$，$b=\log_{\frac{1}{4}}\pi$，$c=\pi^4$，则 a，b，c 的大小关系是（　　）

A．a＞c＞b　B．b＞c＞a　C．c＞b＞a　D．c＞a＞b

3．（5 分）已知$\{a_n\}$为各项都是正数的等比数列，若 $a_4\cdot a_8=4$，则 $a_5\cdot a_6\cdot a_7=$（　　）

A．4　　B．8　　C．16　　D．64

4．（5 分）甲、乙两名同学 8 次数学测验成绩如茎叶图所示，$\overline{x}_1$，$\overline{x}_2$分别表示甲、乙两名同学 8 次数学测验成绩的平均数，s_1，s_2分别表示甲、乙两名同学 8 次数学测验成绩的标准差，则有（　　）

甲		乙
8 9	7	7 8
4 5 5 6	8	3 5 5 7
1 2	9	2 3

A．$\overline{x}_1>\overline{x}_2$，$s_1<s_2$　B．$\overline{x}_1=\overline{x}_2$，$s_1<s_2$　C．$\overline{x}_1=\overline{x}_2$，$s_1=s_2$　D．$\overline{x}_1<\overline{x}_2$，$s_1>s_2$

5．（5 分）已知 p、q 是简单命题，则“p∧q 是真命题”是“¬p 是假命题”的（　　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

6．（5 分）若实数 x，y 满足不等式组$\begin{cases}x+3y-3\leqslant 0\\ x-y+1\geqslant 0\\ y\geqslant -1\end{cases}$则 $z=2|x|+y$ 的取值范围是（　　）

A．[－1，3]　B．[1，11]　C．[1，3]　D．[－1，11]

7．（5 分）定义在 R 上的函数 f（x）满足 f（x+6）=f（x）．当 x∈[－3，－1）时，$f(x)=-(x+2)^2$，当 x∈[－1，3）时，f（x）=x，则 f（1）+f（2）+f（3）+…+f（2015）=（　　）

A．336　B．355　C．1676　D．2015

8．（5 分）为提高信息在传输中的抗干扰能力，通常在原信息中按一定规则加入相关数据组成传输信息．设定原信息为 $a_0a_1a_2$，$a_i\in\{0,1\}$（i=0，1，2），传输信息为 $h_0a_0a_1a_2h_1$，其中 $h_0=a_0\oplus a_1$，$h_1=h_0\oplus a_2$，⊕运算规则为：0⊕0=0，0⊕1=1，1⊕0=1，1⊕1=0，例如原信息为 111，则传输信息为 01111．传输信息在传输过程中受到干扰可能导致接收信息出错，则下列接收信息一定有误的是（　　）

A．11010　　B．01100　　C．10111　　D．00011

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9.（5 分）若 $(\sqrt{x}-\frac{1}{x})^n$ 的二项展开式中各项的二项式系数的和是 64，则 n=_____，展开式中的常数项为_____.（用数字作答）

10.（5 分）已知正数 x，y 满足 x+y=xy，则 x+y 的最小值是_____.

11.（5 分）若直线 $\begin{cases}x=-1+2t\\y=3-2t\end{cases}$（t 为参数）与曲线 $\begin{cases}x=4+a\cos\theta\\y=a\sin\theta\end{cases}$（θ 为参数，a＞0）有且只有一个公共点，则 a=_____.

12.（5 分）若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）截抛物线 $y^2=4x$ 的准线所得线段长为 b，则 a=_____.

13.（5 分）已知非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{b}|=1$，$\vec{a}$ 与 $\vec{b}-\vec{a}$ 的夹角为 120°，则 $|\vec{a}|$ 的取值范围是_____.

14.（5 分）如图，平面中两条直线 l_1 和 l_2 相交于点 O，对于平面上任意一点 M，若 p，q 分别是 M 到直线 l_1 和 l_2 的距离，则称有序非负实数对（p，q）是点 M 的“距离坐标”.

给出下列四个命题：

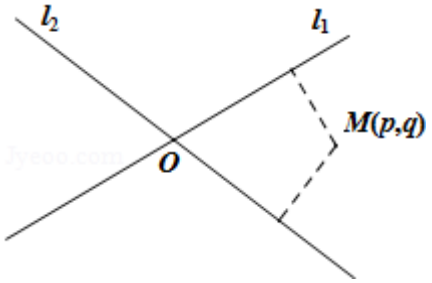
①若 p=q=0，则“距离坐标”为（0，0）的点有且仅有 1 个.

②若 pq=0，且 p+q≠0，则“距离坐标”为（p，q）的点有且仅有 2 个.

③若 pq≠0，则“距离坐标”为（p，q）的点有且仅有 4 个.

④若 p=q，则点 M 的轨迹是一条过 O 点的直线.

其中所有正确命题的序号为_____.



三、解答题（共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

15.（13 分）已知函数 f（x）=$\frac{\sin 2x-2\sin^2 x}{\sin x}$.

（Ⅰ）求 f（x）的定义域及其最大值；

（Ⅱ）求 f（x）在（0，π）上的单调递增区间.

16.（13 分）某校高一年级开设 A，B，C，D，E 五门选修课，每位同学须彼此独立地选三门课程，其中甲同学必选 A 课程，不选 B 课程，另从其余课程中随机任选两门课程．乙、丙两名同学从五门课程中随机任选三门课程.

（Ⅰ）求甲同学选中 C 课程且乙同学未选中 C 课程的概率；

（Ⅱ）用 X 表示甲、乙、丙选中 C 课程的人数之和，求 X 的分布列和数学期望.

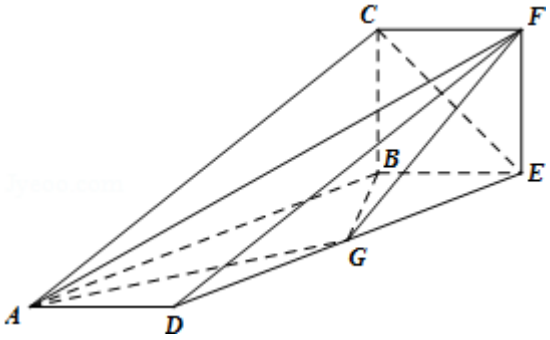
17.（14 分）如图，三棱柱 ABC－DEF 的侧面 BEFC 是边长为 1 的正方形，侧面 BEFC⊥侧面 ADEB，AB=4，∠DEB=60°，

G 是 DE 的中点.

（Ⅰ）求证：CE∥平面 AGF；

（Ⅱ）求证：GB⊥平面 BEFC；

（Ⅲ）在线段 BC 上是否存在一点 P，使二面角 P－GE－B 为 45°，若存在，求 BP 的长；若不存在，说明理由.



18.（13 分）已知函数 f（x）=x+a•e^{-x}.

（Ⅰ）当 a=e^2时，求 f（x）在区间[1，3]上的最小值；

（Ⅱ）求证：存在实数 x_0∈[－3，3]，有 f（x_0）＞a.

19.（13 分）已知椭圆 C 的中心在原点 O，焦点在 x 轴上，离心率为$\frac{\sqrt{3}}{2}$，且椭圆 C 上的点到两个焦点的距离之和为 4.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）设 A 为椭圆 C 的左顶点，过点 A 的直线 l 与椭圆交于点 M，与 y 轴交于点 N，过原点与 l 平行的直线与椭圆交于点 P．证明：|AM|•|AN|=2|OP|^2.

20.（14 分）已知数列{a_n}的前 n 项和为 S_n，且满足 a_1=a（a≠3），$a_{n+1}=S_n+3^n$，设 $b_n=S_n-3^n$，n∈N^*.

（1）求证：数列{b_n}是等比数列；

（2）若 $a_{n+1}\geqslant a_n$，n∈N^*，求实数 a 的最小值；

（3）当 a=4 时，给出一个新数列{e_n}，其中 $e_n=\begin{cases}3, & n=1\\ b_n, & n\geqslant 2\end{cases}$，设这个新数列的前 n 项和为 C_n，若 C_n可以写成 t^p（t，p∈N^*且 t＞1，p＞1）的形式，则称 C_n为“指数型和”．问{C_n}中的项是否存在“指数型和”，若存在，求出所有“指数型和”；若不存在，请说明理由.

参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1.【解答】$\sin(-\frac{23\pi}{6})=\sin(-4\pi+\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$,

故选：C.

2.【解答】∵$0<a=\log_4\pi<1$，$b=\log_{\frac{1}{4}}\pi<0$，$c=\pi^4$，$>1$，

∴c＞a＞b，

故选：D.

3.【解答】∵$\{a_n\}$为各项都是正数的等比数列且 $a_4\cdot a_8=4$，

∴由等比数列的性质可得 $a_6^2=a_4\cdot a_8=4$，∴$a_6=2$，

再由等比数列的性质可得 $a_5\cdot a_6\cdot a_7=a_6^3=8$，

故选：B.

4.【解答】由茎叶图可知，甲的成绩分别为：78，79，84，85，85，86，91，92，

乙的成绩分别为：77，78，83，85，85，87，92，93，

所以$\overline{x_1}=\frac{1}{8}(78+79+84+85+85+86+91+92)=85$，

$s_1^2=\frac{1}{8}[(78-85)^2+(79-85)^2+0+0+(86-85)^2+(91-85)^2+(92-85)^2]=\frac{171}{8}$,

$\overline{x_2}=\frac{1}{8}(77+78+83+85+85+87+92+93)=85$，

$s_2^2=\frac{1}{8}[(77-85)^2+(78-85)^2+0+0+(87-85)^2+(92-85)^2+(93-85)^2]=\frac{230}{8}$,

∴$\overline{x_1}=\overline{x_2}$，$s_1<s_2$

故选：B

5.【解答】∵p∧q 为真命题，

∴p 和 q 或者同时都是真命题，

由¬p 是假命题，知 p 是真命题.

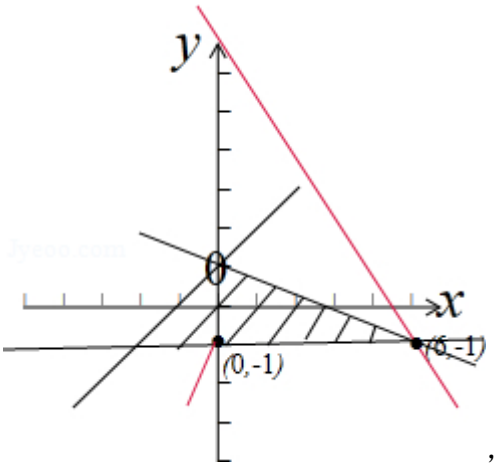
∴“p∧q 是真命题”推出“¬p 是假命题”，

反之不能推出.

则“p∧q 是真命题”是“¬p 是假命题”的充分而不必要条件.

故选 A.

6.【解答】画出满足条件的平面区域，如图示：



，

显然 x≤0 时，直线方程为：y=2x+z，过（0，－1）时，z 最小，$Z_{最小值}$=－1，

x≥0 时，直线方程为：y=－2x+z，过（6，－1）时，z 最大，$Z_{最大值}$=11，

故选：D.

7.【解答】定义在 R 上的函数 f（x）满足 f（x+6）=f（x）. 可得函数的周期为：6，

当 x∈[－3，－1）时，f（x）=－（x+2）^{2}，

当 x∈[－1，3）时，f（x）=x，f（1）=1，f（2）=2，f（3）=f（－3）=－1，f（4）=f（－2）=0，f（5）=f（－1）=－1，f（6）=f（0）=0，

2015=6×335+5，

f（1）+f（2）+f（3）+…+f（2015）=f（1）+f（2）+f（3）+f（4）+f（5）+335[f（1）+f（2）+…+f（6）]=1+2－1+0－1+335×（1+2－1+0－1+0）=336.

故选：A.

8.【解答】A 选项原信息为 101，则 $h_0=a_0\oplus a_1=1\oplus 0=1$，$h_1=h_0\oplus a_2=1\oplus 1=0$，所以传输信息为 11010，A 选项正确；

B 选项原信息为 110，则 $h_0=a_0\oplus a_1=1\oplus 1=0$，$h_1=h_0\oplus a_2=0\oplus 0=0$，所以传输信息为 01100，B 选项正确；

C 选项原信息为 011，则 $h_0=a_0\oplus a_1=0\oplus 1=1$，$h_1=h_0\oplus a_2=1\oplus 1=0$，所以传输信息为 10110，C 选项错误；

D 选项原信息为 001，则 $h_0=a_0\oplus a_1=0\oplus 0=0$，$h_1=h_0\oplus a_2=0\oplus 1=1$，所以传输信息为 00011，D 选项正确；

故选 C.

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9.【解答】由题意知：$2^n=64$，即 n=6；

则 $(\sqrt{x}-\frac{1}{x})^n=(\sqrt{x}-\frac{1}{x})^6$，

由 $T_{r+1}=C_6^r(\sqrt{x})^{6-r}(-\frac{1}{x})^r=(-1)^rC_6^rx^{3-\frac{3r}{2}}$.

令 $3-\frac{3r}{2}=0$，得 r=2.

∴展开式中的常数项为 $(-1)^2C_6^2=15$.

故答案为：6；15.

10.【解答】∵x＞0，y＞0，

∴$xy\leqslant(\frac{x+y}{2})^2$，又 x+y=xy，

∴$x+y\leqslant(\frac{x+y}{2})^2$，

∴$（x+y）^2\geqslant4（x+y）$，

∴$x+y\geqslant4$.

故答案为：4

11.【解答】直线的普通方程为 x+y=2，

曲线的普通的方程为$（x-4）^2+y^2=a^2（a＞0）$，

表示为圆心坐标为（4，0），半径为 a，

若直线和圆只有一个公共点，

则直线和圆相切，

则圆心到直线的距离 $d=\frac{|4-2|}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=a$，

即 $a=\sqrt{2}$，

故答案为：$\sqrt{2}$.

12.【解答】抛物线 $y^2=4x$ 的准线为 x=－1，

代入双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，可得

$y=\pm b\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$，

由题意可得，$b=2b\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$，

解得 a=$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

13.【解答】设$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{b}$，

如图所示：

则由$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

又∵$\vec{a}$与$\vec{b}-\vec{a}$的夹角为 120°，

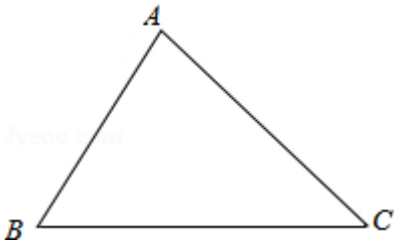
∴∠ABC=60°

又由$|\overrightarrow{AC}|=|\vec{b}|=1$

由正弦定理$\frac{|\vec{a}|}{\sin C}=\frac{|\vec{b}|}{\sin 60^\circ}$得$|\vec{a}|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin C\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{3}$

∴$|\vec{a}|\in$（0，$\frac{2\sqrt{3}}{3}$]

故答案为：$(0,\frac{2\sqrt{3}}{3}]$.



14.【解答】①若 p=q=0，则“距离坐标”为（0，0）的点是两条直线的交点 0，因此有且仅有 1 个，正确.

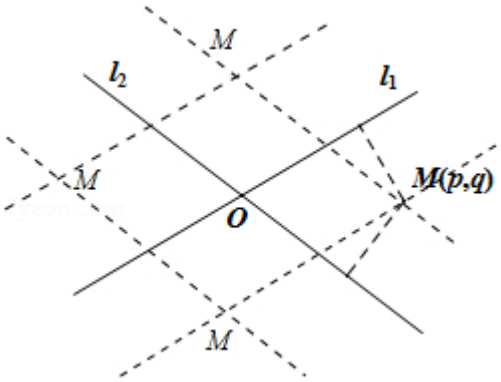
②若 pq=0，且 p+q≠0，则“距离坐标”为（0，q）（q≠0）或（p，0）（p≠0），因此满足条件的点有且仅有 2 个，正确.

③若 pq≠0，则“距离坐标”为（p，q）的点有且仅有 4 个，如图所示，正确.

④若 p=q，则点 M 的轨迹是两条过 0 点的直线，分别为交角的平分线所在直线，因此不正确.

综上可得：只有①②③正确.

故答案为：①②③.



三、解答题（共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程）

15.【解答】（Ⅰ）由 sinx≠0，得 x≠kπ（k∈Z）.

∴f（x）的定义域为{x∈R|x≠kπ，k∈Z}，

∵$f(x)=\frac{\sin 2x-2\sin^2 x}{\sin x}=2\cos x-2\sin x=2\sqrt{2}\cos(x+\frac{\pi}{4})$，

∴f（x）的最大值为$2\sqrt{2}$；

（Ⅱ）∵函数 y=cosx 的单调递增区间为[2kπ+π，2kπ+2π]（k∈Z）

由$2k\pi+\pi\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant 2k\pi+2\pi$，x≠kπ（k∈Z），且 x∈（0，π），

∴f（x）在（0，π）上的单调递增区间为$[\frac{3\pi}{4},\ \pi)$

16.【解答】（Ⅰ）设事件 A 为“甲同学选中 C 课程”，事件 B 为“乙同学选中 C 课程”.

则$P(A)=\frac{C_2^1}{C_3^2}=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$.

因为事件 A 与 B 相互独立，

所以甲同学选中 C 课程且乙同学未选中 C 课程的概率为$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=P(A)[1-P(B)]=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$.　…（4 分）

（Ⅱ）设事件 C 为“丙同学选中 C 课程”.

则$P(C)=\frac{C_4^2}{C_5^3}=\frac{3}{5}$. X 的可能取值为：0，1，2，3.

$P(X=0)=P(\overline{ABC})=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{75}$.

$P(X=1)=P(A\overline{BC})+P(\overline{A}B\overline{C})+P(\overline{AB}C)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{20}{75}$.

$P(X=2)=P(AB\overline{C})+P(A\overline{B}C)+P(\overline{A}BC)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{33}{75}$.

$P(X=3)=P(ABC)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{75}$.

X 为分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{4}{75}$	$\frac{20}{75}$	$\frac{33}{75}$	$\frac{18}{75}$

$E(X)=0\times\frac{4}{75}+1\times\frac{20}{75}+2\times\frac{33}{75}+3\times\frac{18}{75}=\frac{140}{75}=\frac{28}{15}$. …（13 分）

17.【解答】（Ⅰ）证明：连接 CD 与 AF 相交于 H，则 H 为 CD 的中点，连接 HG.

因为 G 为 DE 的中点，

所以 HG∥CE.

因为 CE⊄平面 AGF，HG⊂平面 AGF，

所以 CE∥平面 AGF.

（Ⅱ）证明：BE=1，GE=2，在△GEB 中，∠GEB=60°，BG=$\sqrt{3}$.

因为 $BG^2+BE^2=GE^2$，

所以 GB⊥BE.

因为侧面 BEFC⊥侧面 ADEB，

侧面 BEFC∩侧面 ADEB=BE，

GB⊂平面 ADEB，

所以 GB⊥平面 BEFC.

（Ⅲ）解：BG，BE，BC 两两互相垂直，建立空间直角坐标系 B－xyz.

假设在线段 BC 上存在一点 P，使二面角 P－GE－B 为 45°.

平面 BGE 的法向量 m=（0，0，1），设 P（0，0，λ），λ∈[0，1].

$G(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，E（0，1，0）.

所以 $\overrightarrow{GP}$=（$-\sqrt{3}$，0，λ），$\overrightarrow{GE}=(-\sqrt{3},\ 1,\ 0)$.

设平面 PGE 的法向量为 n=（x，y，z），则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{GP}=0\\ n\cdot\overrightarrow{GE}=0.\end{cases}$

所以 $\begin{cases}-\sqrt{3}x+\lambda z=0\\ -\sqrt{3}x+y=0.\end{cases}$

令 z=1，得 y=λ，$x=\frac{\lambda}{\sqrt{3}}$，

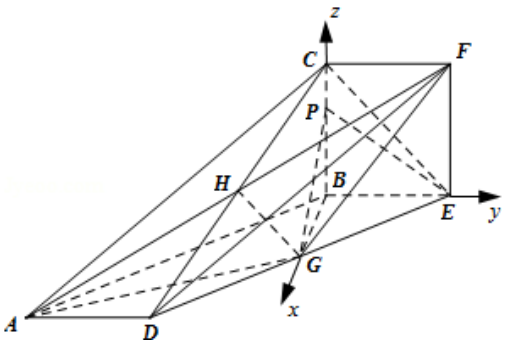
所以 PGE 的法向量为 $n=(\frac{\lambda}{\sqrt{3}},\ \lambda,\ 1)$.

因为 m•n=1，

所以 $1\times\sqrt{\frac{\lambda^2}{3}+\lambda^2+1}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=1$，

解得 $\lambda=\frac{\sqrt{3}}{2}\in[0,1]$，故 $BP=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

因此在线段 BC 上存在一点 P，使二面角 P－GE－B 为 45°，且 $BP=\frac{\sqrt{3}}{2}$.



18.【解答】（Ⅰ）当 $a=e^2$ 时，$f(x)=x+e^{2-x}$，$x\in[1,3]$；

∵$f'(x)=1-e^{2-x}$，由 $f'(x)=0$ 得 $x=2$；

则 x，$f'(x)$，$f(x)$ 关系如下：

x	（1，2）	2	（2，3）
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

所以当 $x=2$ 时，$f(x)$ 有最小值为 3.

（Ⅱ）证明：“存在实数 $x_0\in[-3,3]$，有 $f(x_0)>a$”等价于 $f(x)$ 的最大值大于 a.

因为 $f'(x)=1-ae^{-x}$，

所以当 $a\leqslant 0$ 时，$x\in[-3,3]$，$f'(x)>0$，$f(x)$ 在（－3，3）上单调递增，

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(3)>f(0)=a$.

所以当 $a\leqslant 0$ 时命题成立；

当 $a>0$ 时，由 $f'(x)=0$ 得 $x=\ln a$.

则 $x\in R$ 时，x，$f'(x)$，$f(x)$ 关系如下：

x	（－∞，lna）	lna	（lna，+∞）
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	极小值	↗

（1）当 $a\geqslant e^3$ 时，$\ln a\geqslant 3$，$f(x)$ 在（－3，3）上单调递减，

所以 $f(x)$ 的最大值 $f(-3)>f(0)=a$.

所以当 $a\geqslant e^3$ 时命题成立；

（2）当 $e^{-3}<a<e^3$ 时，$-3<\ln a<3$，

所以 $f(x)$ 在（－3，lna）上单调递减，在（lna，3）上单调递增.

所以 $f(x)$ 的最大值为 $f(-3)$ 或 $f(3)$；

且 f（－3）＞f（0）=a 与 f（3）＞f（0）=a 必有一成立，

所以当 $e^{-3}<a<e^{3}$ 时命题成立；

（3）当 $0<a\leqslant e^{-3}$ 时，$\ln a\leqslant -3$，

所以 f（x）在（－3，3）上单调递增，

所以 f（x）的最大值为 f（3）＞f（0）=a.

所以当 $0<a\leqslant e^{-3}$ 时命题成立；

综上所述，

对任意实数 a 都存在 x∈[－3，3]使 f（x）＞a 成立.

19.【解答】（Ⅰ）设椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，

由题意知 $\begin{cases}a^2=b^2+c^2\\ \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 2a=4\end{cases}$ 解得 a=2，b=1.

所以椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

（Ⅱ）证明：设直线 AM 的方程为：y=k（x+2），则 N（0，2k）.

由 $\begin{cases}y=k(x+2)\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$ 得（$1+4k^2$）$x^2+16k^2x+16k^2-4=0$（*）.

设 A（－2，0），M（x_1，y_1），则－2，x_1 是方程（*）的两个根，

所以 $x_1=\frac{2-8k^2}{1+4k^2}$.

所以 $M(\frac{2-8k^2}{1+4k^2},\ \frac{4k}{1+4k^2})$.

$|AM|=\sqrt{(\frac{2-8k^2+2+8k^2}{1+4k^2})^2+(\frac{4k}{1+4k^2})^2}=\sqrt{\frac{16+16k^2}{(1+4k^2)^2}}=\frac{4\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}$. $|AN|=\sqrt{4+4k^2}=2\sqrt{1+k^2}$.

则 $|AM||AN|=\frac{4\sqrt{1+k^2}\cdot 2\sqrt{1+k^2}}{1+4k^2}=\frac{8(1+k^2)}{1+4k^2}$.

设直线 OP 的方程为：y=kx.

由 $\begin{cases}y=kx\\ x^2+4y^2=4\end{cases}$ 得（$1+4k^2$）$x^2-4=0$.

设 P（x_0，y_0），则 ${x_0}^2=\frac{4}{1+4k^2}$，${y_0}^2=\frac{4k^2}{1+4k^2}$.

所以 $|OP|^2=\frac{4+4k^2}{1+4k^2}$，$2|OP|^2=\frac{8+8k^2}{1+4k^2}$.

所以$|AM|\cdot|AN|=2|OP|^2$.

20.【解答】（1）$a_{n+1}=S_n+3^n\Rightarrow S_{n+1}=2S_n+3^n$，$b_n=S_n-3^n$，$n\in N^*$，

当 $a\neq 3$ 时，$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{S_{n+1}-3^{n+1}}{S_n-3^n}=\frac{2S_n+3^n-3^{n+1}}{S_n-3^n}=2$，

所以$\{b_n\}$为等比数列．$b_1=S_1-3=a-3$，$b_n=（a-3）\times 2^{n-1}$.

（2）由（1）可得 $S_n-3^n=（a-3）\times 2^{n-1}$，

$a_n=S_n-S_{n-1}$，$n\geqslant 2$，$n\in N^*$，

$\therefore a_n=\begin{cases}a & n=1\\ 2\times 3^{n-1}+(a-3)\times 2^{n-2} & n\geqslant 2\end{cases}$，

$\because a_{n+1}\geqslant a_n$，

$\therefore a\geqslant -9$，又 $a\neq 3$，

所以 a 的最小值为 -9；

（3）由（1）当 $a=4$ 时，$b_n=2^{n-1}$，

当 $n\geqslant 2$ 时，$C_n=3+2+4+\cdots+2^n=2^{n+1}+1$，$C_1=3$，

所以对正整数 n 都有 $C_n=2^n+1$.

由 $t^p=2^n+1$，$t^p-1=2^n$，（t，$p\in N^*$且 $t>1$，$p>1$），t 只能是不小于 3 的奇数.

①当 p 为偶数时，$t^p-1=（t^{\frac{p}{2}}+1）（t^{\frac{p}{2}}-1）=2^n$，

因为 t^p+1 和 t^p-1 都是大于 1 的正整数，

所以存在正整数 g，h，使得 $t^p+1=2^g$，$t^{\frac{p}{2}}-1=2^h$，$2^g-2^h=2$，$2^h（2^{g-h}-1）=2$，

所以 $2^h=2$ 且 $2^{g-h}-1=1\Rightarrow h=1$，$g=2$，相应的 $n=3$，即有 $C_3=3^2$，C_3为“指数型和”；

②当 p 为奇数时，$t^p-1=（t-1）（1+t+t^2+\cdots+t^{p-1}）$，由于 $1+t+t^2+\cdots+t^{p-1}$是 p 个奇数之和，仍为奇数，又 $t-1$ 为正偶数，

所以 $（t-1）（1+t+t^2+\cdots+t^{p-1}）=2^n$不成立，此时没有“指数型和”.