2015 北京东城高三二模

数　　学（文）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1.（5 分）已知全集 U=R，集合 A={0，1，2}，B={2，3，4}，如图阴影部分所表示的集合为（　　）



A．{2}　B．{0，1}　C．{3，4}　D．{0，1，2，3，4}

2.（5 分）若复数（m^2－m）+mi 为纯虚数，则实数 m 的值为（　　）

A．－1　B．0　C．1　D．2

3.（5 分）已知圆的方程为 $x^2+y^2-2x-6y+1=0$，那么圆心坐标为（　　）

A．（－1，－3）　B．（1，－3）　C．（1，3）　D．（－1，3）

4.（5 分）设点 P（x，y），则“x=1 且 y=－2”是“点 P 在直线 l：x－y－3=0 上”的（　　）

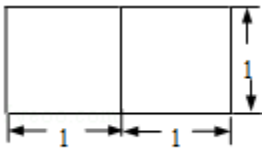
A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

5.（5 分）设 $a=\log_{0.8}0.9$，$b=\log_{1.1}0.9$，$c=1.1^{0.9}$，则 a，b，c 的大小关系是 C（　　）

A．a＜b＜c　B．a＜c＜b　C．b＜a＜c　D．c＜a＜b

6.（5 分）若一个底面是正三角形的三棱柱的正（主）视图如图所示，则其侧面积等于（　　）



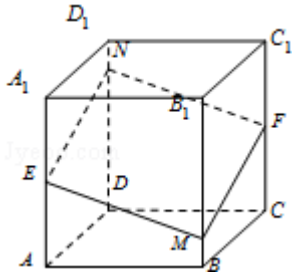
正（主）视图

A．3　B．4　C．5　D．6

7.（5 分）若实数 x，y 满足不等式组 $\begin{cases} x+3y-3\leqslant 0 \\ x-y+1\geqslant 0 \\ y\geqslant -1 \end{cases}$，则 z=2|x|+y 的最大值为（　　）

A．13　B．11　C．3　D．1

8.（5 分）已知正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1，E，F 分别是边 AA_1，CC_1 的中点，点 M 是 BB_1 上的动点，过点 E，M，F 的平面与棱 DD_1 交于点 N，设 BM=x，平行四边形 EMFN 的面积为 S，设 $y=S^2$，则 y 关于 x 的函数 y=f（x）的解析式为（　　）



A. $f(x)=2x^2-2x+\frac{3}{2}$，$x\in[0,1]$

B. $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{2}-x, & x\in[0,\frac{1}{2})\\ x+\frac{1}{2}, & x\in[\frac{1}{2},1].\end{cases}$

C. $f(x)=\begin{cases}-2x^2+\frac{3}{2}, & x\in[0,\frac{1}{2}]\\ -2(x-1)^2+\frac{3}{2}, & x\in(\frac{1}{2},1].\end{cases}$

D. $f(x)=-2x^2+2x+\frac{3}{2}$，$x\in[0,1]$

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.（5 分）已知抛物线 $y^2=2x$ 上一点 P（m，2），则 m=_____，点 P 到抛物线的焦点 F 的距离为_____.

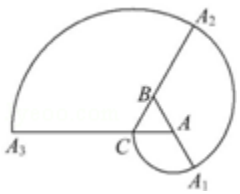
10.（5 分）在△ABC 中，已知 a=2，b=3，那么$\frac{\sin A}{\sin(A+C)}$=_____.

11.（5 分）函数 $y=2x+\frac{2}{x}$（x＜0）的最大值为_____.

12.（5 分）若非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|=2|\vec{a}|$，则向量$\vec{b}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角为_____.

13.（5 分）已知函数 f（x）=cosx（x∈（0，2π））有两个不同的零点 x_1，x_2，且方程 f（x）=m 有两个不同的实根 x_3，x_4，若把这个数按从小到大排列构成等差数列，则实数 m 的值为_____.

14.（5 分）如图，△ABC 是边长为 1 的正三角形，以 A 为圆心，AC 为半径，沿逆时针方向画圆弧，交 BA 延长线于 A_1，记弧 CA_1 的长为 l_1；以 B 为圆心，BA_1 为半径，沿逆时针方向画圆弧，交 CB 延长线于 A_2，记弧 A_1A_2 的长为 l_2；以 C 为圆心，CA_2 为半径，沿逆时针方向画圆弧，交 AC 延长线于 A_3，记弧 A_2A_3 的长为 l_3，则 $l_1+l_2+l_3$=_____. 如此继续以 A 为圆心，AA_3 为半径，沿逆时针方向画圆弧，交 AA_1 延长线于 A_4，记弧 A_3A_4 的长为 l_4，…，当弧长 $l_n=8\pi$ 时，n=_____.



三、解答题共 6 小题，共 80 分. 解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

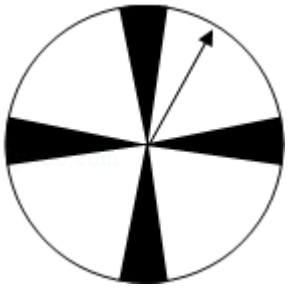
15.（13 分）甲、乙两家商场对同一种商品开展促销活动，对购买该商品的顾客两家商场的奖励方案如下：

甲商场：顾客转动如图所示圆盘，当指针指向阴影部分（图中四个阴影部分均为扇形，且每个扇形圆心角均为 15°，

边界忽略不计）即为中奖.

乙商场：从装有 3 个白球 3 个红球的盒子中一次性摸出 2 球（球除颜色外不加区分），如果摸到的是 2 个红球，即为中奖.

问：购买该商品的顾客在哪家商场中奖的可能性大？



16.（13 分）已知函数 f（x）=cos（2x+$\frac{\pi}{3}$）+cos（2x+$\frac{2}{3}\pi$），g（x）=cos2x.

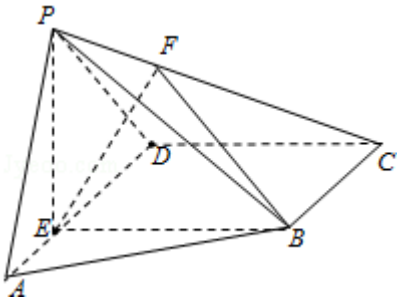
（Ⅰ）若 $\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，且 f（α）=-$\frac{3}{5}\sqrt{3}$，求 g（α）的值；

（Ⅱ）若 $x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，求 f（x）+g（x）的最大值.

17.（13 分）如图，在四棱锥 P=ABCD 中，E 为 AD 上一点，面 PAD⊥面 ABCD，四边形 BCDE 为矩形∠PAD=60°，PB=$2\sqrt{3}$，PA=ED=2AE=2.

（Ⅰ）已知 $\overrightarrow{PF}=\lambda\overrightarrow{PC}$（λ∈R），且 PA∥面 BEF，求 λ 的值；

（Ⅱ）求证：CB⊥平面 PEB.



18.（13 分）已知等比数列{a_n}的前 4 项和 S_4=5，且 $4a_1$，$\frac{3}{2}a_2$，a_2成等差数列.

（Ⅰ）求{a_n}的通项公式；

（Ⅱ）设{b_n}是首项为 2，公差为 - a_1的等差数列，其前 n 项和为 T_n，求满足 $T_{n-1}>0$ 的最大正整数 n.

19.（14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）上的左、右顶点分别为 A，B，$F_1$为左焦点，且|$AF_1$|=2，又椭圆 C 过点$(0,\ 2\sqrt{3})$.

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）点 P 和 Q 分别在椭圆 C 和圆 $x^2+y^2=16$ 上（点 A，B 除外），设直线 PB，QB 的斜率分别为 k_1，k_2，若 $k_1=\frac{3}{4}k_2$，证明：A，P，Q 三点共线.

20.（14 分）已知函数 f（x）=$x^3+\frac{5}{2}x^2+ax+b$，g（x）=$x^3+\frac{7}{2}x^2+\ln x+b$，（a，b 为常数）.

（Ⅰ）若 g（x）在 x=1 处的切线过点（0，﹣5），求 b 的值；

（Ⅱ）设函数 f（x）的导函数为 f′（x），若关于 x 的方程 f（x）﹣x=xf′（x）有唯一解，求实数 b 的取值范围；

（Ⅲ）令 F（x）=f（x）﹣g（x），若函数 F（x）存在极值，且所有极值之和大于 5+ln2，求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

1.【解答】阴影部分表示的集合为 $A\cap(\complement_U B)$，

∵A={0，1，2}，B={2，3，4}，

∴$A\cap(\complement_U B)$={0，1}，

故选：B

2.【解答】复数（m^2－m）+mi 为纯虚数，

则 m^2－m=0 且 m≠0，解得 m=1．

故选：C．

3.【解答】将圆 $x^2+y^2-2x-6y+1=0$ 化成标准方程，得 $(x-1)^2+(y-3)^2=9$，

∴圆表示以 C（1，3）为圆心，半径 r=3 的圆．

故选：C．

4.【解答】把 P（1，－2）代入直线，满足条件，是充分条件，

若点 P 在直线上推不出 x=1，y=－2，不是必要条件，

故选：A．

5.【解答】∵$0<a=\log_{0.8}0.9<1$，$b=\log_{1.1}0.9<0$，$c=1.1^{0.9}>1$，

∴b＜a＜c．

故选：C．

6.【解答】根据题意，得

该三棱柱是直三棱柱，且底面正三角形的边长为 2，

三棱柱的高为 1；

所以，该三棱柱的侧面积为：

3×2×1=6．

故选：D．

7.【解答】作出不等式组对应的平面区域如图：

由$\begin{cases}y=-1\\x+3y-3=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=6\\y=-1\end{cases}$，即 B（6，﹣1），

由$\begin{cases}y=-1\\x-y+1=0\end{cases}$，解$\begin{cases}x=-2\\y=-1\end{cases}$，即 C（﹣2，﹣1），

当 x≥0 时，z=2x+y，即 y=﹣2x+z，x≥0，

当 x＜0 时，z=﹣2x+y，即 y=2x+z，x＜0，

当 x≥0 时，平移直线 y=﹣2x+z，（红线），

当直线 y=﹣2x+z 经过点 A（0，﹣1）时，

直线 y=﹣2x+z 的截距最小为 z=﹣1，

当 y=﹣2x+z 经过点 B（6，﹣1）时，

直线 y=﹣2x+z 的截距最大为 z=11，此时﹣1≤z≤11.

当 x＜0 时，平移直线 y=2x+z，（蓝线），

当直线 y=2x+z 经过点 A（0，﹣1）时，直线 y=2x+z 的截距最小为 z=﹣1，

当 y=2x+z 经过点 C（﹣2，﹣1）时，

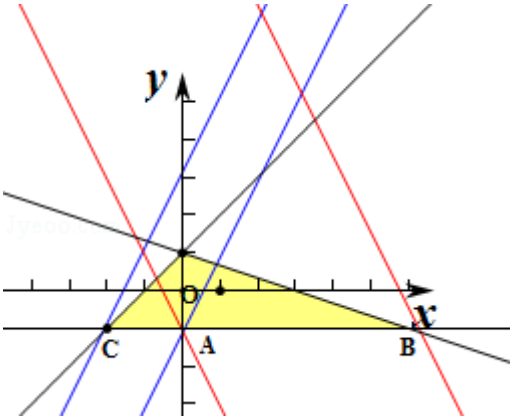
直线 y=2x+z 的截距最大为 z=4﹣1=3，此时﹣1≤z≤3，

综上﹣1≤z≤11，

故 z=2|x|+y 的取值范围是[﹣1，11]，

故 z 的最大值为 11，

故选：B.



8.【解答】由对称性易知四边形 MENF 为菱形，

$\therefore S_{四边形EMFN}=\frac{1}{2}MN\cdot EF$

$\because EF=\sqrt{2}$，$MN=2\sqrt{(\frac{1}{2}-x)^2+(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}=2\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$，

$\therefore S_{MENF}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$

$\therefore f（x）=2x^2-2x+\frac{3}{2}$，

故选：A.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】将 P（m，2）代入抛物线方程 $y^2=2x$，

可得 4=2m，解得 m=2，

即有 P（2，2），

抛物线 $y^2=2x$ 的焦点 F 为（$\frac{1}{2}$，0），

$|PF|=\sqrt{(2-\frac{1}{2})^2+(2-0)^2}=\frac{5}{2}$，

故答案为：2，$\frac{5}{2}$.

10.【解答】∵a=2，b=3，

由正弦定理可得：$\frac{sinA}{sin(A+C)}=\frac{sinA}{sinB}=\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$，

故答案为：$\frac{2}{3}$.

11.【解答】∵x＜0，∴－x＞0，

∴$y=2x+\frac{2}{x}=-(-2x+\frac{2}{-x})$，

∵$-2x+\frac{2}{-x}\geqslant 2\sqrt{(-2x)\cdot\frac{2}{-x}}=4$

∴$y=-(-2x+\frac{2}{-x})\leqslant -4$，

当且仅当 $-2x=\frac{2}{-x}$ 即 x=－1 时取等号，

故答案为：－4

12.【解答】因为非零向量$\vec{a}$，$\vec{b}$满足$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2$，化简得$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}^2=3\vec{a}^2$，

令$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$，则由$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$，$\vec{b}^2=3\vec{a}^2$，可得四边形 OACB 为矩形，∠BOC 为向量$\vec{b}$与$\vec{a}+\vec{b}$的夹角.

令 OA=1，则 OC=2，直角三角形 OBC 中，$\cos\angle BOC=\frac{OB}{OC}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

∴∠BOC=30°；

故答案为：30°.

13.【解答】函数 f（x）=cosx（x∈（0，2π））有两个不同的零点 x_1，x_2，

∴$x_1=\frac{\pi}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}\pi$，∵方程 f（x）=m 有两个不同的实根 x_3，x_4，若把这个数按从小到大排列构成等差数列，

若 m＞0 则，x_3，$\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$，x_4，构成等差数列，可得公差 $d=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=\pi$，则 $x_1=\frac{\pi}{2}-\pi=-\frac{\pi}{2}<0$，显然不可能；

若 m＜0 则，$\frac{\pi}{2}$，x_3，x_4，$\frac{3}{2}\pi$，构成等差数列，可得公差 $3d=\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{2}$，解得 $d=\frac{\pi}{3}$，∴$x_3=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}$，$m=\cos x_3=\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

故答案为：$-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

14.【解答】由题意 $l_1=\frac{2}{3}\pi$，

$l_2=\frac{4}{3}\pi$，

$l_3=\frac{1}{3}\times 6\pi=2\pi$，

所以 $l_1+l_2+l_3=4\pi$；

$l_8=8\pi$，即 $\frac{2n}{3}\pi=8\pi$，解得 n=12；

故答案为：4π；12.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.【解答】如果顾客去甲商场，试验的全部结果构成的区域为圆盘的面积 $\pi\cdot R^2$，

阴影部分的面积为 $\frac{4\times 15\pi R^2}{360}=\frac{\pi R^2}{6}$，

则在甲商场中奖的概率为：$P_1=\frac{\frac{\pi R^2}{6}}{\pi R^2}=\frac{1}{6}$；

如果顾客去乙商场，记 3 个白球为 a_1，a_2，a_3，3 个红球为 b_1，b_2，b_3，

记（x，y）为一次摸球的结果，则一切可能的结果有：

（a_1，a_2），（a_1，a_3），（a_1，b_1），（a_1，b_2），（a_1，b_3）

（a_2，a_3），（a_2，b_1），（a_2，b_2），（a_2，b_3），

（a_3，b_1），（a_3，b_2），（a_3，b_3），

（b_1，b_2），（b_1，b_3），

（b_2，b_3），共 15 种，

摸到的是 2 个红球有（b_1，b_2），（b_1，b_3），（b_2，b_3），共 3 种，

则在乙商场中奖的概率为：$P_2=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$，

又 $P_1<P_2$，则购买该商品的顾客在乙商场中奖的可能性大．

16.【解答】（Ⅰ）由$f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})+\cos(2x+\frac{2}{3}\pi)$

得 f（x）=$\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x=-\sqrt{3}\sin 2x$.

因为$f(\alpha)=-\frac{3}{5}\sqrt{3}$，即$-\sqrt{3}\sin 2\alpha=-\frac{3}{5}\sqrt{3}$，

所以$\sin 2\alpha=\frac{3}{5}$.

又因为$\alpha\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，

所以$2\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$.

故$\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$，

即$g(\alpha)=\frac{4}{5}$.

（Ⅱ）f（x）+g（x）=$-\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\cos(2x+\frac{\pi}{3})$.

因为$x\in[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}]$，

所以$2x+\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$.

所以当$2x+\frac{\pi}{3}=0$，

即$x=-\frac{\pi}{6}$时，f（x）+g（x）有最大值，最大值为 2.

17.【解答】（Ⅰ）解：连接 AC 交 BE 于点 M，连接 FM.

∵PA∥面 BEF，

∴FM∥AP　　…（2 分）

∵EM∥CD，∴$\frac{AM}{MC}=\frac{AE}{ED}=\frac{1}{2}$

∵FM∥AP，

∴$\frac{PF}{FC}=\frac{AM}{MC}=\frac{1}{2}$

∴$\lambda=\frac{1}{3}$　　…（6 分）

（Ⅱ）证明：∵AP=2，AE=1，∠PAD=60°，∴PE=$\sqrt{3}$，

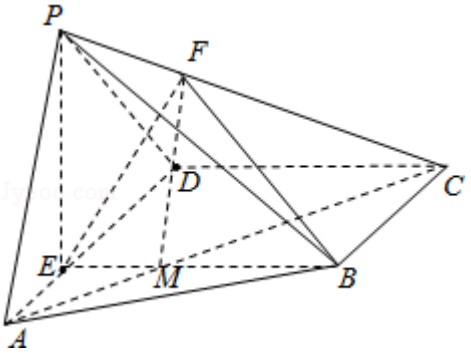
∴PE⊥AD…（8 分）

又面 PAD⊥面 ABCD，且面 PAD∩面 ABCD=AD，

∴PE⊥面 ABCD，∴PE⊥CB，

又 BE⊥CB，且 PE∩BE=E，

∴CB⊥平面 PEB.　　…（12 分）



18.【解答】（Ⅰ）根据题意，设$\{a_n\}$的公比为 q，

∵ $4a_1$ ，$\frac{3}{2}a_2$ ，a_2成等差数列，

∴$4a_1+a_2=3a_2$.

整理得 $2a_1=a_2$，即 $2a_1=a_1q$，解得 q=2.

又 $S_4=\frac{a_1(1-2^4)}{1-2}=5$，解得 $a_1=\frac{1}{3}$.

∴ $a_n=\frac{1}{3}\times 2^{n-1}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得 $-a_1=-\frac{1}{3}$，

∴ $b_n=2+(n-1)(-\frac{1}{3})=\frac{7-n}{3}$.

$T_n=\frac{2+\frac{7-n}{3}}{2}\times n=\frac{(13-n)n}{6}$，

又∵$T_{n-1}>0$，∴$\frac{[13-(n-1)](n-1)}{6}>0$，

整理得（n－1）（n－14）＜0，

解得 1＜n＜14.

故满足 $T_{n-1}>0$ 的最大正整数为 13.

19.【解答】（Ⅰ）由已知可得 a－c=2，$b=2\sqrt{3}$，又 $b^2=a^2-c^2=12$，

解得 a=4.

故所求椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 A（－4，0），B（4，0）．设 P（x_1，y_1），Q（x_2，y_2），

$\therefore k_{PA}\cdot k_1=\frac{y_1}{x_1+4}\cdot\frac{y_1}{x_1-4}=\frac{{y_1}^2}{{x_1}^2-16}$.

∵P（x_1，y_1）在椭圆 C 上，

$\therefore\frac{{x_1}^2}{16}+\frac{{y_1}^2}{12}=1$，即${y_1}^2=12-\frac{3}{4}{x_1}^2$.

$\therefore k_{PA}\cdot k_1=\frac{12-\frac{3}{4}{x_1}^2}{{x_1}^2-16}=-\frac{3}{4}$.

又∵$k_1=\frac{3}{4}k_2$，

∴$k_{PA}k_2=-1$．①

由已知点 Q（x_2，y_2）在圆 $x^2+y^2=16$ 上，AB 为圆的直径，

∴QA⊥QB.

∴$k_{QA}\cdot k_2=-1$．②

由①②可得 $k_{PA}=k_{QA}$.

∵直线 PA，QA 有共同点 A，

∴A，P，Q 三点共线.

20.【解答】（Ⅰ）设 g（x）在 x=1 处的切线方程为 y=kx－5，

因为$g'(x)=3{x}^2+7x+\frac{1}{x}$，$g'(1)=11$，

所以 k=11，故切线方程为 y=11x－5.

当 x=1 时，y=6，将（1，6）代入$g(x)={x}^3+\frac{7}{2}{x}^2+\ln x+b$，

得$b=\frac{3}{2}$.　…（3 分）

（Ⅱ）f’（x）=$3x^2+5x+a$，

由题意得方程${x}^3+\frac{5}{2}{x}^2+ax+b=3{x}^3+5{x}^2+ax+x$有唯一解，

即方程$2{x}^3+\frac{5}{2}{x}^2+x=b$有唯一解.

令$h(x)=2{x}^3+\frac{5}{2}{x}^2+x$，则 h’（x）=$6x^2+5x+1$=（2x+1）（3x+1），

所以 h（x）在区间$(-\infty,-\frac{1}{2})$，$(-\frac{1}{3},+\infty)$上是增函数，在区间$(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$上是减函数.

又$h(-\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$，$h(-\frac{1}{3})=-\frac{7}{54}$，

故实数 b 的取值范围是$(-\infty,-\frac{7}{54})\cup(-\frac{1}{8},+\infty)$.　…（8 分）

（Ⅲ）F（x）=ax﹣x^2﹣lnx，

所以$F'(x)=-\frac{2x^2-ax+1}{x}$.

因为F（x）存在极值，所以$F'(x)=-\frac{2x^2-ax+1}{x}=0$在（0，+∞）上有根，

即方程$2x^2$﹣ax+1=0在（0，+∞）上有根，则有△=a^2﹣8≥0.

显然当△=0时，F（x）无极值，不合题意；

所以方程必有两个不等正根.

记方程$2x^2$﹣ax+1=0的两根为x_1，x_2，则$\begin{cases}x_1x_2=\frac{1}{2}>0\\x_1+x_2=\frac{a}{2}\end{cases}$

$F(x_1)+F(x_2)=a(x_1+x_2)-({x_1}^2+{x_2}^2)-(\ln x_1+\ln x_2)=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}+1-\ln\frac{1}{2}>5-\ln\frac{1}{2}$,

解得a^2＞16，满足△＞0.

又$x_1+x_2=\frac{a}{2}>0$，即a＞0，

故所求a的取值范围是（4，+∞）.　…（14分）