2014 北京顺义高三二模

数　　学（理）

一、选择题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.（5 分）复数 i（1 - i）等于（　　）

A. 1+i　B. 1 - i　C. - 1+i　　D. - 1 - i

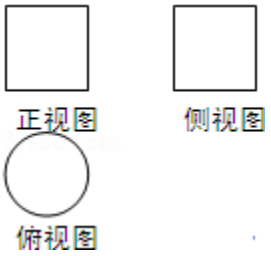
2.（5 分）已知 $a=\log_2 3$，$b=\log_{\frac{1}{2}} 3$，$c=3^{-\frac{1}{2}}$，则（　　）

A. c＞b＞a　B. c＞a＞b　C. a＞b＞c　D. a＞c＞b

3.（5 分）已知向量 $\vec{a}$=（1，1），$\vec{b}$=（ - 1，1），若 $k\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则实数 k=（　　）

A. - 1　B. 0　　C. 1　　D. 2

4.（5 分）如图所示，一个空间几何体的正视图和侧视图都是边长为 2 的正方形，俯视图是一个圆，那么这个几何体的侧面积为（　　）



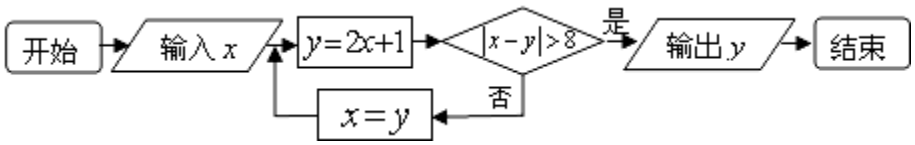
A. 4π　B. $\frac{5}{4}\pi$　C. π　　D. $\frac{3}{2}\pi$

5.（5 分）“φ=0”是“函数 f（x）=sin（x+φ）为奇函数”的（　　）

A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　D. 既不充分也不必要条件

6.（5 分）执行如图所示的程序框图，若输入 x=2，则输出 y 的值为（　　）



A. 23　B. 11　C. 5　　D. 2

7.（5 分）已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$（a＞0），与抛物线 $y^2=4x$ 的准线交于 A，B 两点，O 为坐标原点，若△ABC 的面积等于 1，则 a=（　　）

A. $\sqrt{2}$　B. 1　　C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　D. $\frac{1}{2}$

8.（5 分）设函数 f（x）=$\begin{cases} x-[x], & x\geqslant 0 \\ f(x+1), & x<0 \end{cases}$，其中[X]表示不超过 x 的最大整数，如[- 1.1]= - 2，[π]=3 等. 若

直线 y=kx+k（k＞0）与函数 y=f（x）的图象恰有三个不同的交点，则实数 k 的取值范围是（　　）

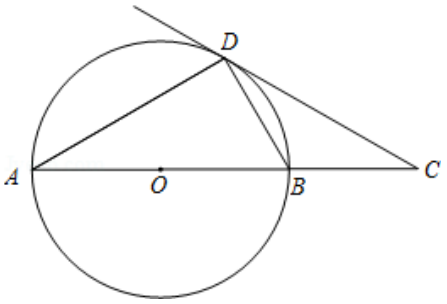
A.（0，$\frac{1}{4}$）　B.［$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{3}$）　C.（$\frac{1}{3}$，1）　D.［$\frac{1}{4}$，1）

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.把答案填在答题卡上.

9.（5 分）在极坐标系中，点（2，$\frac{\pi}{6}$）到极轴的距离_____.

10.（5 分）已知等比数列{a_n}的各项均为正数，若 a_1=1，a_3=4，则 a_2=_____；此数列的其前 n 项和 S_n=_____.

11.（5 分）如图，AB 是圆 O 的直径，AB=2，D 为圆 O 上一点，过 D 作圆 O 的切线交 AB 的延长线于点 C．若 DA=DC，则∠BDC=_____；BC=_____.



12.（5 分）对甲、乙、丙、丁 4 人分配 4 项不同的工作 A、B、C、D，每人一项，其中甲不能承担 A 项工作，那么不同的工作分配方案有_____种.（用数字作答）

13.（5 分）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．若 a=c=$\sqrt{6}$，sin$\frac{B}{2}$=$\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 cosB=_____，b=_____.

14.（5 分）点 M(a,b)在由不等式组$\begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x+y\leqslant 2 \end{cases}$确定的平面区域内，则点 N(a+b,a－b)所在平面区域的面积是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（13 分）已知函数 f（x）=asinxcosx－cos2x 的图象过点（$\frac{\pi}{8}$，0）.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）求函数 f（x）的最小正周期及最大值.

16.（13 分）甲、乙两名运动员参加“选拔测试赛”，在相同的条件下，两人 5 次测试的成绩（单位：分）记录如下：

甲	86	77	92	72	78
乙	78	82	88	82	95

（Ⅰ）用茎叶图表示这两组数据；

（Ⅱ）现要从甲乙二人中选派一名运动员参加比赛，你认为选派谁参赛更好？说明理由（不用计算）；

（Ⅲ）若将频率视为概率，对运动员甲在今后三次测试成绩进行预测，记这三次成绩高于 80 分的次数为 X，求 X

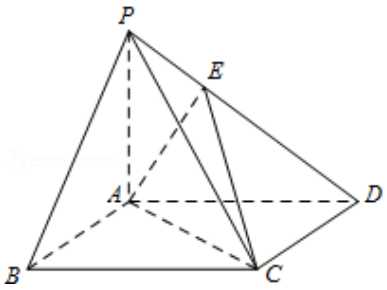
的分布列和数学期望 EX.

17.（14 分）如图：在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是正方形，PA=AB=2，PB=PD=$2\sqrt{2}$，点 E 在 PD 上，且 PE=$\frac{1}{3}$PD.

（Ⅰ）求证：PA⊥平面 ABCD；

（Ⅱ）求二面角 E－AC－D 的余弦值；

（Ⅲ）证明：在线段 BC 上存在点 F，使 PF∥平面 EAC，并求 BF 的长.



18.（13 分）已知函数 f（x）=$\frac{x^2+ax+a}{e^x}$，其 a 中为常数，a≤2.

（Ⅰ）当 a=1 时，求曲线 y=f（x）在点（0，f（0））处的切线方程；

（Ⅱ）是否存在实数 a，使 f（x）的极大值为 2？若存在，求出 a 的值；若不存在，说明理由.

19.（14 分）已知椭圆 E 的两个焦点分别为（－1，0）和（1，0），离心率 e=$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）设直线 l：y=x+m（m≠0）与椭圆 E 交于 A、B 两点，线段 AB 的垂直平分线交 x 轴于点 T，当 m 变化时，求△TAB 面积的最大值.

20.（13 分）已知集合 A={a_1，a_2…a_n}（0≤a_1＜a_2＜…＜a_n，n∈N^*，n≥3）具有性质 P：对任意 i，j（1≤i≤j≤n），a_i+a_j与 a_j－a_i至少一个属于 A.

（1）分别判断集合 M={0，2，4}与 N=（1，2，3）是否具有性质 P，并说明理由；

（2）①求证：0∈A；②求证：a_1+a_2+a3+…+a_n=$\frac{n}{2}a_n$；

（3）研究当 n=3，4 和 5 时，集合 A 中的数列{a_n}是否一定成等差数列.

参考答案

一、选择题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【解答】i（1 - i）=i - i^2=i+1.

故选 A.

2.【解答】由对数函数 y=$\log_2 x$ 的图象与性质，得 $\log_2 3 > \log_2 2=1$，∴a＞1；

由对数函数 y=$\log_{\frac{1}{2}} x$ 的图象与性质，得 $\log_{\frac{1}{2}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 1=0$，∴b＜0；

又∵$c=3^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$，∴0＜c＜1；

∴a＞c＞b.

故选：D.

3.【解答】∵向量$\vec{a}$=（1，1），$\vec{b}$=（ - 1，1），

∴k$\vec{a}$ - $\vec{b}$=k（1，1） - （ - 1，1）=（k+1，k - 1），

∵k$\vec{a}$ - $\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，

∴（k$\vec{a}$ - $\vec{b}$）•$\vec{a}$=（k+1）×1+（k - 1）×1=0，

解得 k=0，

故选：B.

4.【解答】由三视图的知识，

它是底面直径与高均为 2 的圆柱，

所以侧面积 S=4π.

故选 A.

5.【解答】若 φ=0，则 f（x）=sin（x+φ）=sinx，为奇函数，所以成立.

若 f（x）=sin（x+φ）为奇函数，则 φ=kπ.

所以“φ=0”是“函数 f（x）=sin（x+φ）为奇函数”的充分不必要条件.

故选 A.

6.【解答】第一次执行循环体后，y=5，不满足输出条件，故 x=5，

再次执行循环体后，y=11，不满足输出条件，故 x=11，

再次执行循环体后，y=23，满足输出条件，

故输出的 y 值为 23，

故选：A.

7.【解答】抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为 x=﹣1，

代入双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$（a＞0），可得 $y=\pm\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}$，

∵△ABO 的面积等于 1，

∴$\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}=1$，

∴$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故选：C.

8.【解答】画出函数 f（x）=$\begin{cases}x-[x], & x\geqslant 0\\ f(x+1), & x<0\end{cases}$，g（x）=k（x+1）（k＞0）的图象，

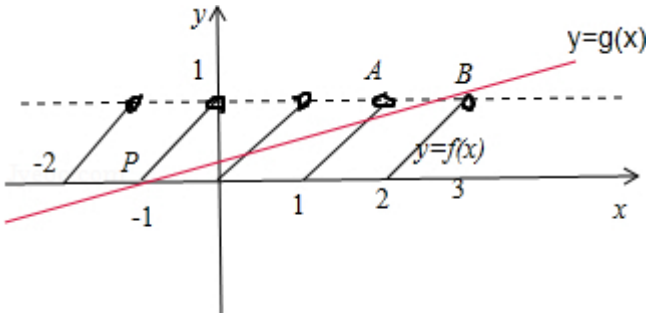
若直线 y=kx+k（k＞0）与函数，y=f（x）的图象恰有三个不同的交点，

结合图象可得：$k_{PB}\leqslant k<k_{PA}$，

∵$k_{PA}=\frac{1}{2-(-1)}=\frac{1}{3}$，$k_{PB}=\frac{1}{3-(-1)}=\frac{1}{4}$.

∴$\frac{1}{4}\leqslant k<\frac{1}{3}$.

故选 B.



二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.把答案填在答题卡上.

9.【解答】点（2，$\frac{\pi}{6}$）的直角坐标为（$\sqrt{3}$，1），此点到极轴的距离为 1，

故答案为：1.

10.【解答】∵等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，

∴数列$\{a_n\}$的公比 q 也为正数，

∴$q=\sqrt{\frac{a_3}{a_1}}=2$

∴$a_2=a_1q=2$，

∴$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1(1-2^n)}{1-2}=2^n-1$

故答案为：2；2^n-1

11.【解答】由已知中 AB 为圆 O 的直径，则∠ADB=90°

∠A+∠ABD=90° …①

又∵CD 为圆的切线，则∠BDC=∠A

又由 DA=DC，可得∠A=∠C

∵∠ABD 中三角形 BCD 的外角，

∴∠ABD=∠ADB+∠C=2∠A…②

结合①得：∠DAC=30°，

∴∠BDC=30°，

∵AB=2，∴BC=BD=1.

故答案为：30°，1.

12.【解答】根据题意，甲不能承担 A 项工作，则甲有三项工作可选，即甲有 3 种情况，

剩余的三个人对应其余三项工作，有 $A_3^3=6$ 种情况，

则不同的工作分配方案有 3×6=18 种；

故答案为：18.

13.【解答】∵$\sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴$\cos B=1-2\sin^2\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$；

∵$a=c=\sqrt{6}$，

∴由余弦定理得：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B=6+6-4=8$，

则 $b=2\sqrt{2}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$；$2\sqrt{2}$

14.【解答】由M（a，b）满足$\begin{cases}x\geqslant 0\\ y\geqslant 0\\ x+y\leqslant 2\end{cases}$，可得$\begin{cases}a\geqslant 0\\ b\geqslant 0\\ a+b\leqslant 2\end{cases}$

令m=a+b，n=a﹣b，则N（a+b，a﹣b）为N（m，n）

解得 2a=m+n，2b=m﹣n

因为a≥0，b≥0，且a+b≤2

∴N（m，n）满足$\begin{cases}m+n\geqslant 0\\ m-n\geqslant 0\\ m\leqslant 2\end{cases}$

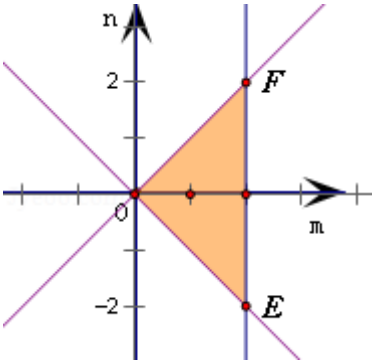
以m为横坐标，n为纵坐标，在直角坐标系中画出不等式组表示的平面区域如图，

得到△OEF，其中O（0，0），E（2，2），F（2，﹣2），

可得$S_{△OEF}=\frac{1}{2}\times EF\times 2=4$.

即得N（a+b，a﹣b）所在平面区域的面积是4

故答案为：4



三、解答题：本大题共6小题，共80分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.【解答】（Ⅰ）由已知函数f（x）=asinxcosx﹣cos2x=$\frac{a}{2}$sin2x﹣cos2x

∵f（x）的图象过点（$\frac{\pi}{8}$，0），

∴$\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=0$，

解得a=2.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得函数f（x）=sin2x﹣cos2x=$\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，

∴最小正周期T=$\frac{2\pi}{2}=\pi$，

最大值为$\sqrt{2}$.

16.【解答】（Ⅰ）茎叶图如图所示（3分）

（Ⅱ）由图可知，乙的平均成绩大于甲的平均成绩，且乙的方差小于甲的方差，且乙的最高分高于甲的最高分，因此应选派乙参赛更好．－－－－（6分）

（Ⅲ）记甲“高于8（0分）”为事件A，

∴P（A）=$\frac{2}{5}$

∴X～B（3，$\frac{2}{5}$），P（X=k）=$C_3^k(\frac{2}{5})^k(1-\frac{2}{5})^{3-k}$－－－－（8分）

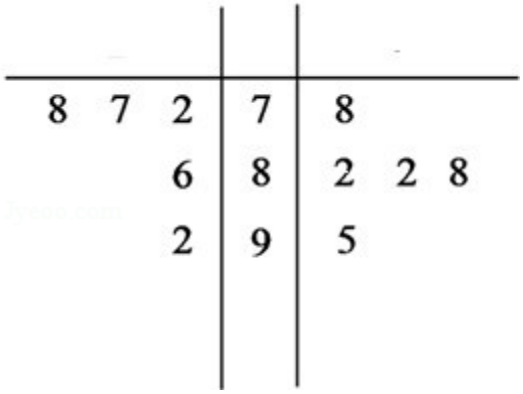
X的可能取值为0，1，2，3.

分布列为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

－－－－（11分）

EX=1×$\frac{54}{125}$+2×$\frac{36}{125}$+3×$\frac{8}{125}$=$\frac{6}{5}$－－－－（13分）



17.【解答】（Ⅰ）证明：∵PA=AB=2，PB=2$\sqrt{2}$，

∴$PA^2+AB^2=PB^2$，

∴PA⊥AB，同理PA⊥AD，（2分）

又AB∩AD=A，∴PA⊥平面ABCD.（4分）

（Ⅱ）解：以A为原点，AB，AD，AP分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系，

则A（0，0，0），B（2，0，0），C（2，2，0），D（0，2，0），E（0，$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{3}$），（6分）

平面ACD的法向量为$\overrightarrow{AP}$=（0，0，2），

设平面EAC的法向量为$\vec{n}$=（x，y，z），（7分）

∵$\overrightarrow{AC}$=（2，2，0），$\overrightarrow{AE}$=（0，$\frac{2}{3}$，$\frac{4}{3}$），

∴$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=2x+2y=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{2}{3}y+\frac{4}{3}z=0\end{cases}$，

取 x=2，得$\vec{n}$=（2，﹣2，1），（8 分）

设二面角 E﹣AC﹣D 的平面角为 θ，

则 cos θ =cos＜$\vec{n}$，$\overrightarrow{AP}$＞=$\frac{2}{2\times\sqrt{9}}=\frac{1}{3}$，

∴二面角 E﹣AC﹣D 的余弦值为$\frac{1}{3}$.（10 分）

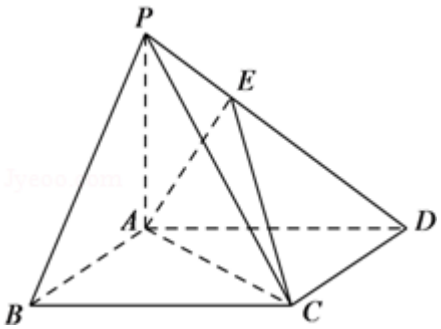
（Ⅲ）证明：假设存在点 F∈BC，使 PF∥平面 EAC，

令 F（2，a，0），（0≤a≤2），（12 分）

∴$\overrightarrow{PF}$=（2，a，﹣2），由 PF∥平面 EAC，

∴$\overrightarrow{PF}\cdot\vec{n}$=0，解得 a=1，

∴存在点 F（2，1，0）为 BC 的中点，即 BF=1.（14 分）



18.【解答】（Ⅰ）当 a=1 时，$f(x)=\frac{x^2+x+1}{e^x}$，f（0）=$\frac{1}{e^0}=1$.

∵$f'(x)=\frac{(2x+1)e^x-e^x(x^2+x+1)}{e^{2x}}=\frac{-x^2+x}{e^x}=\frac{-x(x-1)}{e^x}$，

∴f′（0）=0.

则曲线在点（0，f（0））处的切线方程为 y=1；

（Ⅱ）由 f（x）=$\frac{x^2+ax+a}{e^x}$，得

$f'(x)=\frac{(2x+a)e^x-e^x(x^2+ax+a)}{e^{2x}}=\frac{-x[x-(2-a)]}{e^x}$.

由 f′（x）=0，得 x_1=0，x_2=2﹣a，

∵a≤2，

∴2﹣a≥0.

当 a=2 时，$f'(x)=\frac{-x^2}{e^x}\leqslant 0$，

∴f（x）在（－∞，+∞）上递减，无极值；

当a＜2时，2－a＞0，f（x）在（－∞，2），（2－a，+∞）上递减，在（0，2－a）上递增；

∴f（2－a）=（4－a）e^{a-2}为f（x）的极大值，

令u（a）=（4－a）e^{a-2}（a＜2），则u′（a）=（3－a）e^{a-2}＞0，

∴u（a）在（－∞，2）上递增，

∴u（a）＜u（2）=2，

∴不存在实数a，使f（x）的极大值为2.

19.【解答】（Ⅰ）由已知椭圆的焦点在x轴上，c=1，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴a=$\sqrt{2}$，b=1，－－－（2分）

∴椭圆E的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$－－－（4分）

（Ⅱ）y=x+m代入椭圆方程，消去y得$3x^2+4mx+2m^2-2=0$

∵直线l与椭圆有两个交点，

∴△＞0，可得$m^2<3$（*）－－－（6分）

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

∴$x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-2}{3}$，

∴弦长$|AB|=\sqrt{2}|x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\sqrt{6-2m^2}$，－－－（8分）

AB中点M（$-\frac{2m}{3}$，$\frac{m}{3}$），设T（x，0），∴$k_{AB}\cdot k_{MT}=-1$，

∴$\frac{\frac{m}{3}}{-\frac{2m}{3}-x}\cdot 1=-1$，

∴$x=-\frac{m}{3}$，

∴T（$-\frac{m}{3}$，0），$|TM|=\frac{\sqrt{2}|m|}{3}$－－－（11分）

∴$S=\frac{1}{2}|AB||MT|=\frac{2}{9}\sqrt{-2(m^2-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{2}}$

∵$m^2<3$，∴$m^2=\frac{3}{2}$时，$S_{max}=\frac{\sqrt{2}}{3}$－－（14分）

20.【解答】（1）解：集合M={0，2，4}具有性质P，N={1，2，3}不具有性质P.

∵集合M={0，2，4}中，a_j+a_i与a_j-a_i（1≤i≤j≤2）两数中都是该数列中的项，4－2是该数列中的项，

∴集合M={0，2，4}具有性质P；

N={1，2，3}中，3在此集合中，则由题意得3+3和3－3至少一个一定在，而3+3=6不在，所以3－3=0一定是这个

集合的元素，而此集合没有 0，故不具有性质 P；

（2）证明：①若数列 A 具有性质 P，则 $a_n+a_n=2a_n$ 与 $a_n-a_n=0$ 两数中至少有一个是该数列中的一项，

∵$0\leqslant a_1<a_2<\cdots<a_n$，$n\geqslant 3$，而 $2a_n$ 不是该数列中的项，∴0 是该数列中的项，

∴$0\in A$；

②令 $j=n$，$i>1$，则∵“a_i+a_j 与 a_j-a_i 两数中至少有一个属于 A”，

∴a_i+a_j 不属于 A，∴a_n-a_i 属于 A

令 $i=n-1$，那么 a_n-a_{n-1} 是集合 A 中某项，a_1 不行，是 0，a_2 可以.

如果是 a_3 或者 a_4，那么可知 $a_n-a_3=a_{n-1}$，那么 $a_n-a_2>a_n-a_3=a_{n-1}$，只能是等于 a_n 了，矛盾.

所以令 $i=n-1$ 可以得到 $a_n=a_2+a_{n-1}$，

同理，令 $i=n-2$、$n-3$，…，2，可以得到 $a_n=a_i+a_{n+1-i}$，

∴倒序相加即可得到 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{n}{2}a_n$；

（3）解：$n=3$ 时，∵数列 a_1，a_2，a_3 具有性质 P，$0\leqslant a_1<a_2<a_3$

∴a_2+a_3 与 a_3-a_2 至少有一个是该数列中的一项，

∵$a_1=0$，a_2+a_3 不是该数列的项，∴$a_3-a_2=a_2$，∴$a_1+a_3=2a_2$，数列$\{a_n\}$一定成等差数列；

$n=4$ 时，∵数列 a_1，a_2，a_3，a_4 具有性质 P，$0\leqslant a_1<a_2<a_3<a_4$，

∴a_3+a_4 与 a_4-a_3 至少有一个是该数列中的一项，

∵a_3+a_4 不是该数列的项，∴$a_4-a_3=a_2$，或 $a_4-a_3=a_3$，

若 $a_4-a_3=a_2$，则数列$\{a_n\}$一定成等差数列；若 $a_4-a_3=a_3$，则数列$\{a_n\}$不一定成等差数列；

$n=5$ 时，∵数列 a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 有性质 P，$0\leqslant a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$，

∴a_4+a_5 与 a_5-a_4 至少有一个是该数列中的一项，

∵a_4+a_5 不是该数列的项，∴$a_5-a_4=a_2$，或 $a_5-a_4=a_3$，或 $a_5-a_4=a_4$，

若 $a_5-a_4=a_4$，$a_4-a_3=a_2$，则数列$\{a_n\}$一定成等差数列；若 $a_5-a_4=a_2$，或 $a_5-a_4=a_3$，则数列$\{a_n\}$不一定成等差数列.