2014 北京顺义高三二模

数　　学（文）

一、选择题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.（5 分）已知集合 A={x|0＜x＜3}，B={x|x－2＞0}，则集合 A∩B=（　　）

A.（0，2）　B.（0，3）　C.（2，3）　D.（2，+∞）

2.（5 分）已知直线 l_1：x－2y+1=0 与直线 l_2：mx－y=0 平行，则实数 m 的值为（　　）

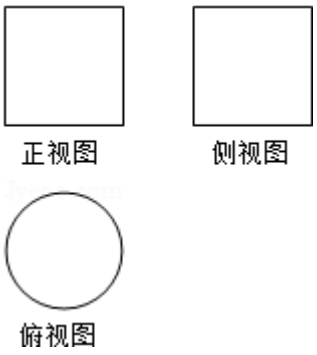
A. $\frac{1}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. 2　D. －2

3.（5 分）“$\phi=\frac{\pi}{2}$”是“$\cos\phi=0$”的（　　）

A. 充分不必要条件　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

4.（5 分）如图所示，一个空间几何体的正视图和侧视图都是边长为 2 的正方形，俯视图是一个圆，那么这个几何体的体积为（　　）

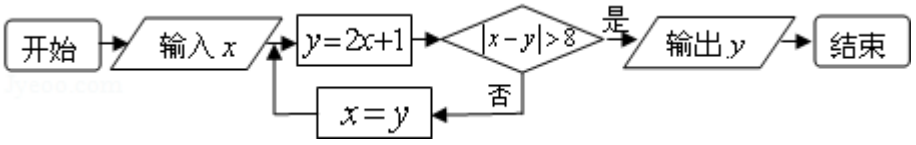


A. $\frac{\pi}{2}$　B. π　C. 2π　D. 4π

5.（5 分）已知向量 $\vec{a}$=（1，1），$\vec{b}$=（－2，3），若 $k\vec{a}-\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 垂直，则实数 k=（　　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{5}{2}$　D. $-\frac{5}{2}$

6.（5 分）执行如图所示的程序框图，若输入 x=2，则输出 y 的值为（　　）



A. 23　B. 11　C. 5　D. 2

7.（5 分）已知函数 f（x）=$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, & x>0\\ 2^x, & x\leqslant 0\end{cases}$，若关于 x 的方程 f（x）=k 有两个不等的实根，则实数 k 的取值范围是（　　）

A.（0，+∞）　B.（－∞，1）　C.（1，+∞）　D.（0，1]

8.（5 分）已知点 A 在抛物线 $y^2=4x$ 上，且点 A 到直线 x - y - 1=0 的距离为$\sqrt{2}$，则点 A 的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.把答案填在答题卡上.

9.（5 分）某校有初中学生 1200 人，高中学生 900 人，教师 120 人，现用分层抽样方法从所有师生中抽取一个容量为 n 的样本进行调查，如果从高中学生中抽取 60 人，那么 n=_____.

10.（5 分）计算$\frac{i-2}{1+2i}$=_____.

11.（5 分）双曲线 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$ 的渐近线方程是_____.

12.（5 分）已知实数 x，y 满足约束条件$\begin{cases} y\leqslant x \\ x+y\leqslant 1 \\ y\geqslant -1 \end{cases}$，则 z=2x+y 的最小值为_____.

13.（5 分）在△ABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．若 a=c=$\sqrt{6}$，$\sin\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 cosB=_____，b=_____.

14.（5 分）数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n．若数列$\{a_n\}$的各项按如下规则排列：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$，…，$\frac{1}{n}$，$\frac{2}{n}$，…，$\frac{n-1}{n}$…，则 a_{15}=_____；若存在正整数 k，使 $S_{k-1}<10$，$S_k>10$，则 a_k=_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（13 分）已知函数 f（x）=$\frac{a}{2}$sin2x - cos2x 的图象过点（$\frac{\pi}{8}$，0）.

（Ⅰ）求实数 a 的值；

（Ⅱ）求函数 f（x）的最小正周期及最大值.

16.（13 分）甲、乙两名运动员参加“选拔测试赛”，在相同条件下，两人 5 次测试的成绩（单位：分）记录如下：

甲	86	77	92	72	78
乙	78	82	88	82	95

（Ⅰ）用茎叶图表示这两组数据；

（Ⅱ）现要从中选派一名运动员参加比赛，你认为选派谁参赛更好？说明理由（不用计算）；

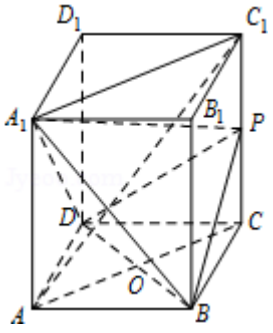
（Ⅲ）若从甲、乙两人的 5 次成绩中各随机抽取一个，求甲的成绩比乙高的概率.

17.（14 分）如图：已知长方体 ABCD - $A_1B_1C_1D_1$ 的底面 ABCD 是边长为 2 的正方形，高 $AA_1=2\sqrt{2}$，P 为 CC_1 的中点，AC 与 BD 交于 O 点.

（Ⅰ）求证：BD⊥平面 AA_1C_1C；

（Ⅱ）求证：AC_1∥平面 PBD；

（Ⅲ）求三棱锥 A_1 - BOP 的体积.



18.（13 分）已知数列$\{\frac{1}{a_n}\}$是公差为 2 的等差数列，且 $a_1=1$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）设数列$\{a_na_{n+1}\}$的前 n 项和为 T_n. 证明：$\frac{1}{3}\leqslant T_n<\frac{1}{2}$.

19.（14 分）已知椭圆 E 的两个焦点分别为（－1，0）和（1，0），离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）若直线 l：y=kx+m（k≠0）与椭圆 E 交于不同的两点 A、B，且线段 AB 的垂直平分线过定点 P（$\frac{1}{2}$，0），求实数 k 的取值范围.

20.（13 分）已知函数 $f（x）=\frac{1}{3}x^3-2x^2+ax+b$ 的图象在点 P（3，f（3））处的切线方程为 y=3x－5.

（Ⅰ）求实数 a，b 的值；

（Ⅱ）设 $g（x）=f（x）+\frac{m}{x-2}$.

①若 g（x）是[3，+∞）上的增函数，求实数 m 的最大值；

②是否存在点 Q，使得过点 Q 的直线若能与曲线 y=g（x）围成两个封闭图形，则这两个封闭图形的面积总相等．若存在，求出点 Q 坐标；若不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题共 8 个小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【解答】∵集合 A={x|0＜x＜3}，B={x|x－2＞0}={x|x＞2}，

则集合 A∩B={x|2＜x＜3}，

故选：C.

2.【解答】∵直线 l_1：x－2y+1=0 与直线 l_2：mx－y=0 平行，

∴$\frac{m}{1}=\frac{-1}{-2}$，

解得 m=$\frac{1}{2}$.

故选：A.

3.【解答】当 φ=$\frac{\pi}{2}$时，cosφ=0 成立，充分性成立.

当 cosφ=0，则 φ=$\frac{\pi}{2}$+kπ，k∈Z，则 φ=$\frac{\pi}{2}$不一定成立，必要性不成立.

故“φ=$\frac{\pi}{2}$”是“cosφ=0”的充分不必要条件，

故选：A.

4.【解答】由三视图可知：该几何体是一个圆柱，高和底面直径都是 2.

∴$V=\pi\times1^2\times2=2\pi$.

故选 C.

5.【解答】∵向量$\vec{a}$=（1，1），$\vec{b}$=（－2，3），k$\vec{a}$－$\vec{b}$=（k+2，k－3），

∵k$\vec{a}$－$\vec{b}$与$\vec{a}$垂直，

∴$\vec{a}\cdot(k\vec{a}-\vec{b})=k\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}$=2k－（－2+3）=2k－1=0，解得 k=$\frac{1}{2}$，

故选：A.

6.【解答】第一次执行循环体后，y=5，不满足输出条件，故 x=5，

再次执行循环体后，y=11，不满足输出条件，故 x=11，

再次执行循环体后，y=23，满足输出条件，

故输出的 y 值为 23，

故选：A.

7.【解答】画出函数 f（x）=$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}x, & x>0\\ 2^{x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 的图象，

和直线 y=k，

关于 x 的方程 f（x）=k 有两个不等的实根等价于 f（x）的图象与直线有且只有两个交点.

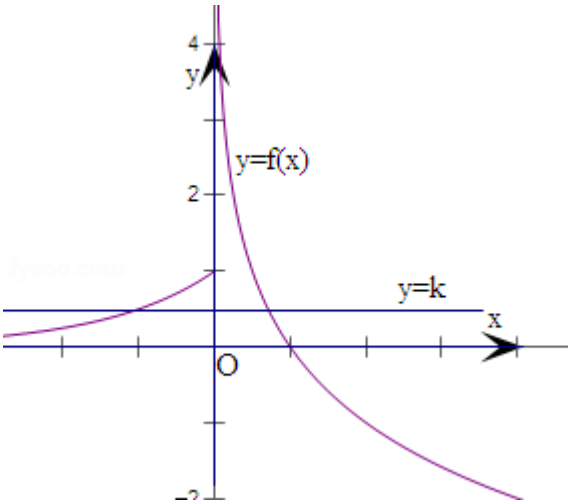
观察得出：

（1）k＞1，或 k＜0 有且只有 1 个交点；

（2）0＜k≤1 有且只有 2 个交点.

故实数 k 的取值范围是（0，1].

故选 D.



8.【解答】设 A（x，y），

∵点 A 到直线 x﹣y﹣1=0 的距离为$\sqrt{2}$，

∴$\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

∴|x﹣y﹣1|=2，

当 x﹣y﹣1=2，即$\frac{y^2}{4}$﹣y﹣3=0，方程有两解；

x﹣y﹣1=﹣2，即$\frac{y^2}{4}$﹣y+1=0，方程有一解，

∴满足条件的点 A 有 3 个.

故选：C.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9.【解答】每个个体被抽到的概率等于$\frac{60}{900}=\frac{1}{15}$.

故 n=（1200+900+120）×$\frac{1}{15}$=1220×$\frac{1}{15}$=148，

故答案为：148.

10.【解答】$\frac{i-2}{1+2i}=\frac{(i-2)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{5i}{1^2+2^2}$=i.

故答案为 i.

11.【解答】∵双曲线标准方程为$x^2-\frac{y^2}{4}$=1，

其渐近线方程是$x^2-\frac{y^2}{4}$=0，

整理得 y=±2x.

故答案为 y=±2x.

12.【解答】作出不等式组表示的平面区域，如图所示的阴影部分

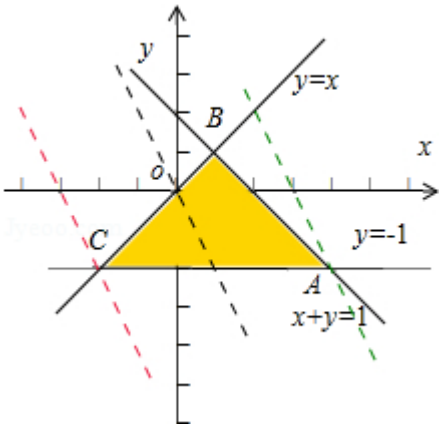
由 z=2x+y 可得 y=﹣2x+z，则 z 表示直线 y=﹣2x+z 在 y 轴上的截距，截距越小，z 越小

由题意可得，当 y=﹣2x+z 经过点 C 时，z 最小

由$\begin{cases}y=-1\\y=x\end{cases}$，可得 A（﹣1，﹣1），

此时 z=﹣3

故答案为：﹣3.



13.【解答】∵sin$\frac{B}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

∴cosB=1 - 2sin$^2\frac{B}{2}=\frac{1}{3}$;

∵a=c=$\sqrt{6}$,

∴由余弦定理得：$b^2=a^2+c^2$ - 2accosB=6+6 - 4=8，

则 b=2$\sqrt{2}$.

故答案为：$\frac{1}{3}$；2$\sqrt{2}$

14.【解答】解：由题意可得，分母为 2 的有一个，分母为 3 的有 2 个，分母为 4 的有 3 个，分母为 5 的有 4 个，分母为 6 的有 5 个，…

由于 1+2+3+4+5=15，故 $a_{15}=\frac{5}{6}$.

把原数列分组，分母相同的为一组：$\frac{1}{2}$；$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$；$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{4}$，$\frac{3}{4}$；$\frac{1}{5}$，$\frac{2}{5}$，$\frac{3}{5}$，$\frac{4}{5}$；$\frac{1}{6}$…；

发现他们的个数是 1，2，3，4，5…

构建新数列 b_n，表示数列中每一组的和，则 $b_n=\frac{n}{2}$是个等差数列，记 b_n 的前 n 项和为 T_n，

利用等差数列的和知道 $T5=\frac{15}{2}$，$T6=\frac{21}{2}$，

所以 a_k 定在$\frac{1}{7}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{6}{7}$中，又因为 $S_{k-1}<10$，$S_k\geqslant 10$，而 $T5+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}=9+\frac{9}{14}<10$，

$T5+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}=10+\frac{1}{2}>10$，

故第 k 项为 $a_k=\frac{6}{7}$.

故答案为：$\frac{5}{6}$，$\frac{6}{7}$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.【解答】（Ⅰ）由已知函数 f（x）=$\frac{a}{2}$sin2x - cos2x 的图象过点（$\frac{\pi}{8}$，0），

∴$\frac{a}{2}\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=0$，解得 a=2.

（Ⅱ）由（Ⅰ）得函数函数 f（x）=sin2x - cos2x=$\sqrt{2}$sin（2x - $\frac{\pi}{4}$），

∴最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，最大值为$\sqrt{2}$.

16.【解答】（Ⅰ）茎叶图如图：

甲				乙		
8	7	2	7	8		
		6	8	2	2	8
		2	9	5		

（Ⅱ）由图可知，乙的平均成绩大于甲的平均成绩，乙的数据主要集中在 82 附近，

则乙的方差小于甲的方差，且乙的最高分高于甲的最高分，因此应选派乙参赛更好.

（Ⅲ）记事件 A：甲的成绩比乙高

从甲、乙两人 5 次的成绩中各随机抽取一个成绩，所有的基本事件如下：（86，78），（86，82），（86，88），（86，82），（86，95），

（77，78），（77，82），（77，88），（77，82），（77，95），

（92，78），（92，82），（92，88），（92，82），（92，95），

（72，78），（72，82），（72，88），（72，82），（72，95），

：（78，78），（78，82），（78，88），（78，82），（78，95），共 25 个.

事件 A 包含的基本事件有：（86，78），（86，82），（86，82），（92，78），（92，82），（92，88），（92，82），共 7 个，

∴甲的成绩比乙高的概率 P（A）=$\frac{7}{25}$.

17.【解答】（Ⅰ）证明：在长方体 AC_1 中，∵底面 ABCD 是边长为 4 的正方形，∴对角线 BD⊥AC.

又∵A_1A⊥平面 ABCD，∴A_1A⊥BD.

AC∩A_1A=A，AC⊂面 A_1ACC_1，A_1A⊂面 A_1ACC_1；

∴BD⊥面 A_1ACC_1.

（Ⅱ）证明：连接 PO，则

∵点 P 是侧棱 C_1C 的中点，O 是 AC 的中点，

∴AC_1∥OP，

∵AC_1⊄平面 PBD，OP⊂平面 PBD，

∴AC_1∥平面 PBD；

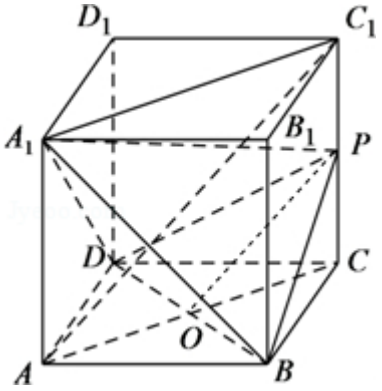
（Ⅲ）解：∵$AA_1=2\sqrt{2}$，$AO=\sqrt{2}$，∴$A_1O=\sqrt{10}$，

同样计算可得 $A_1P=\sqrt{10}$，∴△A_1OP 为等腰三角形，

∵CO=CO=$\sqrt{2}$，∴OP=2，

∴等腰三角形 A_1OP 的高为 3，

∴$V_{A1-BOP}=\frac{1}{3}S_{\triangle A1OP}\cdot OB=\sqrt{2}$.



18.【解答】（Ⅰ）由已知列$\{\frac{1}{a_n}\}$为公差为2的等差数列，

∴$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)\cdot 2$，又$a_1=1$，∴$\frac{1}{a_n}=2n-1$，

∴$a_n=\frac{1}{2n-1}$；

（Ⅱ）由（Ⅰ）知$a_n a_{n+1}=\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，

∴$T_n=a_1a_2+a_2a_3+\cdots a_na_{n+1}$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$，

∴$T_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{2}$，又∵$T_n=\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2+\frac{1}{n}}$，$T_n$随n的增大而增大，

∴$T_n\geqslant T_1=\frac{1}{3}$，

∴$\frac{1}{3}\leqslant T_n<\frac{1}{2}$.

19.【解答】（Ⅰ）由已知椭圆的焦点x轴上，c=1，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$a=\sqrt{2}$，$b^2=a^2-c^2=1$，

∴椭圆E的方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$；

（Ⅱ）$\begin{cases}y=kx+m\\ \frac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，消去y得，$(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-2=0$，

∵直线l与椭圆有两个交点，∴$16k^2m^2-4(1+2k^2)(2m^2-2)>0$，可得$m^2<1+2k^2$，

设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），则$x_1+x_2=\frac{-4km}{1+2k^2}$，∴AB中点的横坐标为$x_0=\frac{-2km}{1+2k^2}$，

AB中点的纵坐标为$y_0=kx_0+m=\frac{m}{1+2k^2}$，∴AB的中点D（$-\frac{2km}{1+2k^2}$，$\frac{m}{1+2k^2}$），

设 AB 中垂线 l′ 的方程为：$y=-\frac{1}{k}(x-\frac{1}{2})$，

∵D 在 l′上，∴D 点坐标代入 l′ 的方程可得，$m=\frac{-1-2k^2}{2k}$，

将 $m^2<1+2k^2$ 代入解得，$k>\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $k<-\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴实数 k 的取值范围是 $(-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2})\cup(\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty)$.

20.【解答】（Ⅰ）x=3 时，f（3）=3a+b－9

∵$f'(x)=x^2-4x+a$，

∴f′（3）=9－12+a，

∴a=6

又∵点 P（3，f（3））在直线 y=3x－5 上，

∴f（3）=4，即 3a+b－9=4，

∴b=－5

∴a=6，b=－5，

∴$f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+6x-5$.

（Ⅱ）①$g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+6x-5+\frac{m}{x-2}$.

又 g（x）是[3，+∞）上的增函数，

∴$g'(x)=x^2-4x+6-\frac{m}{(x-2)^2}=(x-2)^2-\frac{m}{(x-2)^2}+2\geqslant 0$，在[3，+∞）上恒成立，

令 $(x-2)^2=t$，则 t≥1，

设 $y=t-\frac{m}{t}+2$，

∴$t-\frac{m}{t}+2\geqslant 0$ 在[1，+∞）上恒成立，

即 $m\leqslant t^2+2t=(t+1)^2-1$ 恒成立，

∴m≤3，

故实数 m 的最大值是 3.

②∵$g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+6x-5+\frac{m}{x-2}$，

∴$g(4-x)=\frac{1}{3}(4-x)^3-2(4-x)^2+6(4-x)-5+\frac{m}{4-x-2}=-\frac{1}{3}x^3+2x^2-6x-\frac{25}{3}-\frac{m}{x-2}$，

∴$g(x)+g(4-x)=\frac{10}{3}$，

∴Q$(2,\frac{5}{3})$

表明：若点 A（x，y）为 g（x）图象上任意一点，则点（4﹣x，$\frac{10}{3}$﹣y）也在图象上，

而线段 AB 的中点恒为 Q（2，$\frac{5}{3}$）；

由此可知 g（x）图象关于点 Q（2，$\frac{5}{3}$）对称.

这也表明存在点 Q（2，$\frac{5}{3}$），使得过 Q 的直线若能与 g（x）图象相交围成封闭图形，

则这两个封闭图形面积相等.