2014 北京通州高三二模

数　　学（文）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1.（5 分）设集合 A={0，1}，集合 B={－1，0，a－1}，若 A⊆B，则实数 a 的值是（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

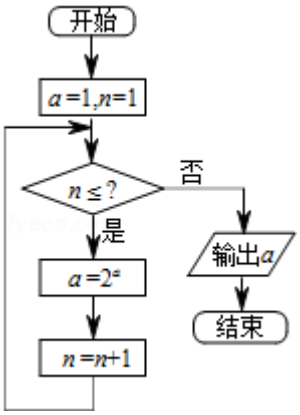
2.（5 分）已知 i 是虚数单位，则复数 z=i（2－i）所对应的点落在（　　）

A．第一象限 B．第二象限 C．第三象限 D．第四象限

3.（5 分）设不等式组$\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y\geqslant 0 \\ x\leqslant 2 \end{cases}$表示的平面区域为 E，在区域 E 内随机取一个点，则此点落在圆 $x^2+y^2=4$ 内的概率是（　　）

A．$\frac{\pi}{2}$　B．$\frac{\pi}{3}$　C．$\frac{3\pi}{10}$　D．$\frac{\pi}{4}$

4.（5 分）执行如图所示的程序框图，若输出的 a 的值为 16，图中判断框内？处应填的数为（　　）



A．2　　B．3　　C．4　　D．5

5.（5 分）已知直线 l_1：ax+3y－1=0，l_2：x+by+1=0，则$\frac{a}{b}$=－3 是 $l_1\perp l_2$（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件 D．既不充分也不必要条件

6.（5 分）已知 m、n 是两条不同的直线，α、β 是两个不同的平面，有下列 4 个命题：

①若 m∥n，n⊂α，则 m∥α；

②若 m⊥n，m⊥α，n⊄α，则 n∥α；

③若 α⊥β，m⊥α，n⊥β，则 m⊥n；

④若 m、n 是异面直线，m⊂α，n⊂β，m∥β，则 n∥α．

其中正确的命题有（　　）

A．①② B．②③ C．③④ D．②④

7.（5 分）已知函数 $y=\sqrt{1+x|x|}$，则直线 y=x+1 与函数图象交点的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

8．（5分）已知：数列$\{a_n\}$满足$a_1=16$，$a_{n+1}-a_n=2n$，则$\frac{a_n}{n}$的最小值为（　　）

A．8　　B．7　　C．6　　D．5

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分.）

9．（5分）抛物线$x^2=4y$的准线方程为_____.

10．（5分）设回归直线方程为$\hat{y}=2.5-2x$，当变量x增加一个单位时，y平均增加_____ 个单位.

11．（5分）已知定义在R上的函数y=f（x）的图象在点（1，f（1））处的切线方程为x－y－5=0，则f（1）+f′（1）=_____.

12．（5分）在△ABC中，角A，B，C所对的边分别为a，b，c，且满足2acosB=bcosC+ccosB，则∠B=_____.

13．（5分）设$\overrightarrow{OM}=(1,\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{ON}=(0,1)$，O为坐标原点，动点P（x，y）满足$0\leqslant\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}\leqslant1$，$0\leqslant\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON}\leqslant1$，则$z=\frac{y+3}{x+2}$的最小值是_____.

14．(5分)直线x=t(t＞0)与函数f(x)=x^2+1，g(x)=lnx的图象分别交于A、B两点，当|AB|最小时，t值是_____.

三、解答题（共6小题，共80分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

15．（13分）若函数f）=$2\cos^2x+\sqrt{3}\sin2x+a$（a∈R）

（1）求函数f（x）的周期及对称轴方程；

（2）若函数f（x）在区间[0，$\frac{\pi}{2}$]上的最小值为5，求函数f（x）在[0，$\frac{\pi}{2}$]区间上的最大值.

16．（13分）2012年3月2日，国家环保部发布了新修订的《环境空气质量标准》．其中规定：居民区的PM2.5年平均浓度不得超过35微克/立方米，PM2.5的24小时平均浓度不得超过75微克/立方米．　某城市环保部门随机抽取了一居民区去年20天PM2.5的24小时平均浓度的监测数据，数据统计如下：

组别	PM2.5浓度（微克/立方米）	频数（天）	频率
第一组	（0，25]	5	0.25
第二组	（25，50]	10	0.5
第三组	（50，75]	3	0.15
第四组	（75，100）	2	0.1

（Ⅰ）从样本中PM2.5的24小时平均浓度超过50微克/立方米的5天中，随机抽取2天，求恰好有一天PM2.5的24小时平均浓度超过75微克/立方米的概率；

（Ⅱ）求样本平均数，并根据样本估计总体的思想，从PM2.5的年平均浓度考虑，判断该居民区的环境是否需要改进？说明理由.

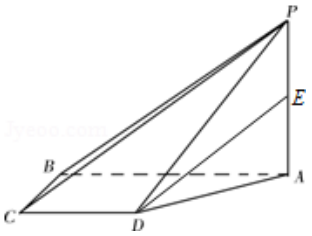
17．（13分）如图，在四棱锥P－ABCD中，PA⊥底面ABCD，ABCD是直角梯形，AB⊥BC，AB∥CD，AB=2BC=2CD=2，点

E 为 PA 中点.

（Ⅰ）求证：DE∥平面 PBC；

（Ⅱ）求证：平面 PBC⊥平面 PAB；

（Ⅲ）若∠PDA=$\frac{\pi}{4}$，求四棱锥 P－ABCD 的体积.



18.（13 分）已知函数 f（x）=－x^3+ax^2－4（a∈R）.

（1）若 a=2，求 f（x）在[－1，1]上的最小值；

（2）若存在 x_0∈（0，+∞），使 f（x_0）＞0，求 a 的取值范围.

19.（14 分）已知椭圆 C 的中心在原点，对称轴为坐标轴，且过（0，1），（1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$）

（Ⅰ）求椭圆 C 的方程；

（Ⅱ）过点 S（0，－$\frac{1}{3}$）且斜率为 k 的动直线 l 交椭圆 C 于 A，B 两点，在 y 轴上是否存在定点 D，使以 AB 为直径的圆恒过这个点？若存在，求出 D 的坐标，若不存在，说明理由.

20.（14 分）已知 f（x）=$\frac{x}{1+x}$，数列{a_n}为首项是 1，以 f（1）为公比的等比数列；数列{b_n}中 b_1=$\frac{1}{2}$，且 b_{n+1}=f（b_n），

（1）求数列{a_n}和{b_n}的通项公式

（2）令 $c_n=a_n(\frac{1}{b_n}-1)$，{c_n}的前 n 项和为 T_n，证明：对∀n∈N_+有 1≤T_n＜4.

参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1.【解答】∵集合 A={0，1}，∴1∈A.

∵A⊆B，∴1∈B.

∵B={﹣1，0，a﹣1}，∴1=a﹣1.

∴a=2.

故答案为：B.

2.【解答】∵z=i（2﹣i）=﹣i^2+2i=1+2i，

∴复数 z=i（2﹣i）所对应的点的坐标为（1，2），位于第一象限.

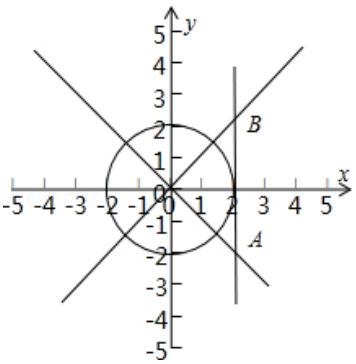
故选：A.

3.【解答】不等式组$\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y\geqslant 0 \\ x\leqslant 2 \end{cases}$表示的平面区域为 E，为图中的三角形 OAB

A（2，﹣2），B（2，2）

由几何概率的计算公式可得点落在圆 $x^2+y^2=4$ 内的概率是 $P=\frac{\frac{1}{4}\pi\cdot 2^2}{\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2}=\frac{\pi}{4}$，

故选：D.



4.【解答】由程序框图知：第一次循环 $a=2^1=2$，n=2；

第二次循环 $a=2^2=4$，n=3；

第三次循环 $a=2^4=16$，n=4；

∵输出的 a 的值为 16，∴n=5 时跳出循环体，∴判断框内的条件为：n≤4.

故选：C.

5.【解答】当 b≠0 时，两直线的斜率分别为 $-\frac{a}{3}$，$-\frac{1}{b}$，若 $\frac{a}{b}=-3$，则 $-\frac{a}{3}\cdot(-\frac{1}{b})=\frac{a}{3b}=-1$，此时 $l_1\perp l_2$，充分性成立.

当 a=0，b=0 时，满足 $l_1\perp l_2$ 成立，但 $\frac{a}{b}=-3$ 不成立，即必要性不成立，

故 $\frac{a}{b}=-3$ 是 $l_1\perp l_2$ 的充分不必要条件，

故选：A.

6.【解答】①若 m∥n，n⊂α，此时有 m⊂α 或 m∥α，故①不正确；

②若 m⊥n，m⊥α，n⊄α，可得出 n∥α，故②正确；

③若 α⊥β，m⊥α，n⊥β，可得出 m⊥n，故③正确；

④若 m、n 是异面直线，m⊂α，n⊂β，m∥β，此时 n⊂α 或 n∥α，故④不正确.

综上，②③正确

故选 B

7.【解答】①当 x≥0 时，$y=\sqrt{1+x^2}$，联立 $\begin{cases}y=x+1\\ y=\sqrt{1+x^2}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$，∴交点为（0，1），

②当 x＜0 时，$y=\sqrt{1-x^2}$，联立 $\begin{cases}y=x+1\\ y=\sqrt{1-x^2}\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=-1\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}$（舍去）∴交点为（-1，0）.

综上得，有两个交点.

故选：C.

8.【解答】$a_2-a_1=2$，

$a_3-a_2=4$，

…

$a_{n+1}-a_n=2n$，

这 n 个式子相加，就有

$a_{n+1}=16+n(n+1)$，

即 $a_n=n(n-1)+16=n^2-n+16$，

$\therefore\frac{a_n}{n}=n+\frac{16}{n}-1$，

用均值不等式，知道它在 n=4 的时候取最小值 7.

故选 B.

二、填空题（共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.）

9.【解答】∵抛物线方程为 $x^2=4y$，

∴其准线方程为：y=﹣1.

故答案为：y=﹣1.

10.【解答】∵回归直线方程为$\hat{y}$=2.5﹣2x，

∴变量 x 增加一个单位时，变量 y 平均变化[2.5﹣2（x+1）]﹣（2.5﹣x）=﹣2

∴变量 y 平均减少 2 个单位，即 y 平均增加﹣2 个单位.

故答案为：﹣2.

11.【解答】∵函数 y=f（x）的图象在点（1，f（1））处的切线方程为 x﹣y﹣5=0，

∴f（1）=﹣4，f′（1）=1，

∴f（1）+f′（1）=﹣3.

故答案为：﹣3.

12.【解答】已知等式利用正弦定理化简得：2sinAcosB=sinBcosC+sinCcosB，

整理得：2sinAcosB=sin（B+C）=sinA，

∵sinA≠0，∴cosB=$\frac{1}{2}$，

则∠B=60°.

故答案为：60°.

13.【解答】∵$\overrightarrow{OM}$=（1，$\frac{1}{2}$），$\overrightarrow{ON}$=（0，1），O 为坐标原点，动点 P（x，y）满足 0≤$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}$≤1，

0≤$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{ON}$≤1，

∴$0\leqslant x+\frac{1}{2}y\leqslant 1$，0≤y≤1.

画出可行域如图所示，

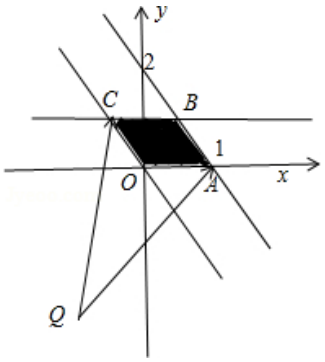
则 z=$\frac{y+3}{x+2}$表示点 Q（﹣2，﹣3）与可行域中的点 P（x，y）连线的斜率.

A（1，0），C $(-\frac{1}{2},\ 1)$.

∵k_{AQ}=1，k_{CQ}=$\frac{8}{3}$.

因此 z=$\frac{y+3}{x+2}$的最小值是 1.

故答案为：1.



14.【解答】设函数 y=f（x）－g（x）=x^2－lnx+1，求导数得

y′=2x－$\frac{1}{x}$=$\frac{2x^2-1}{x}$，

当 0＜x＜$\frac{\sqrt{2}}{2}$时，y′＜0，函数在（0，$\frac{\sqrt{2}}{2}$）上为单调减函数，

当 x＞$\frac{\sqrt{2}}{2}$时，y′＞0，函数在（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，+∞）上为单调增函数，

所以当 x=$\frac{\sqrt{2}}{2}$时，所设函数的最小值为$\frac{3}{2}$+$\frac{1}{2}$ln2，

则所求 t 的值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{2}$；

三、解答题（共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.）

15.【解答】（1）∵函数 f（x）=2$\cos^2$x+$\sqrt{3}$sin2x+a（a∈R）

=1+cos2x+$\sqrt{3}$sin2x+a

=2sin（2x+$\frac{\pi}{6}$）a+1+a

∴T=$\frac{2\pi}{2}$=π，

∴函数 f（x）的周期 π，

令 2x+$\frac{\pi}{6}$=$\frac{\pi}{2}$+kπ，k∈Z，

∴x=$\frac{\pi}{6}$+$\frac{1}{2}$kπ，

∴函数 f（x）的对称轴方程 x=$\frac{\pi}{6}$+$\frac{1}{2}$kπ，k∈Z；

（2）∵x∈[0，$\frac{\pi}{2}$]，

∴（$2x+\frac{\pi}{6}$）∈[$\frac{\pi}{6}$，$\frac{7\pi}{6}$]，

∴sin（$2x+\frac{\pi}{6}$）∈[$-\frac{1}{2}$，1]，

∴f（x）∈[$\frac{1}{2}+a$，$\frac{3}{2}+a$]，

∵$\frac{1}{2}+a=5$，

∴$a=\frac{9}{2}$，

∴数 f（x）在[0，$\frac{\pi}{2}$]区间上的最大值$\frac{3}{2}+\frac{9}{2}=6$.

16.【解答】（Ⅰ） 设 PM2.5 的 24 小时平均浓度在（50，75]内的三天记为 A_1，A_2，A_3，PM2.5 的 24 小时平均浓度在（75，100）内的两天记为 B_1，B_2.

所以 5 天任取 2 天的情况有：A_1A_2，A_1A_3，A_1B_1，A_1B_2，A_2A_3，A_2B_1，A_2B_2，A_3B_1，A_3B_2 共 10 种. …（4 分）

其中符合条件的有：A_1B_1，A_1B_2，A_2B_1，A_2B_2，A_3B_1，A_3B_2 共 6 种. …（6 分）

所以所求的概率 $P=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$. …（8 分）

（Ⅱ）去年该居民区 PM2.5 年平均浓度为：12.5×0.25+37.5×0.5+62.5×0.15+87.5×0.1=40（微克/立方米）. …（10 分）

因为 40＞35，所以去年该居民区 PM2.5 年平均浓度不符合环境空气质量标准，故该居民区的环境需要改进. …（12 分）

17.【解答】（Ⅰ）证明：取 PB 中点 F，连结 EF，CF，

∵E 是 PA 中点，∴EF 平行且等于$\frac{1}{2}$AB，

∵AB∥CD，AB=2BC=2CD=2，

∴EF 平行且等于 CD，∴四边形 EFCD 是平行四边形，

∴DE∥CF，

∵DE 不包含于平面 PBC，CF⊂平面 PBC，

∴DE∥平面 PBC.

（Ⅱ）证明：∵PA⊥底面 ABCD，BC⊂底面 ABCD，

∴PA⊥BC，

∵AB⊥BC，PA∩AB=A，∴BC⊥平面 PAB，

∵BC⊂平面 PBC，∴平面 PBC⊥平面 PAB.

（Ⅲ）解：∵ABCD 是直角梯形，AB⊥BC，AB∥CD，AB=2BC=2CD=2，

∴$AD=\sqrt{2}$，

∵PA⊥底面 ABCD，∠PDA=$\frac{\pi}{4}$，

∴PA=$\sqrt{2}$，

∴四棱锥 P－ABCD 的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times(1+2)\times1\times\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

18.【解答】（1）当 a=2 时，f（x）=－x^3+$2x^2$－4，f′（x）=－$3x^2$+4x.

令 f′（x）=0，得$x_1=0$，$x_2=\frac{4}{3}$.

当 x 变化时，f′（x），f（x）的变化情况如下表：

x	－1	（－1，0）	0	（0，1）	1
f′（x）	－7	－	0	＋	1
f（x）	－1	↘	－4	↗	－3

∴当 x∈[－1，1]时，f（x）最小值为 f（0）=－4；

（2）∵$f'(x)=-3x(x-\frac{2a}{3})$.

①若 a≤0，当 x＞0 时，f′（x）＜0，

∴f（x）在（0，+∞）上单调递减.

又∵f（0）=－4，

∴当 x＞0 时，f（x）＜－4.

∴当 a≤0 时，不存在 x_0∈（0，+∞），使 f（x_0）＞0；

②若 a＞0，则当 0＜x＜$\frac{2a}{3}$时，f′（x）＞0，

∴f（x）在$(0,\frac{2a}{3})$上单调递增；

当$x>\frac{2a}{3}$时，f′（x）＜0，

∴f（x）在$(\frac{2a}{3},+\infty)$上单调递减.

∴当 x∈（0，+∞）时，$f_{max}(x)=f(\frac{2a}{3})=-\frac{8a^3}{27}+\frac{4a^3}{9}-4=\frac{4a^3}{27}-4$.

根据题意，得$\frac{4a^3}{27}-4>0$，

∴a＞3.

综上，a 的取值范围是（3，+∞）.

19.【解答】（Ⅰ）∵椭圆 C 的中心在原点，对称轴为坐标轴，且过（0，1），（1，$\frac{\sqrt{2}}{2}$），

∴设椭圆方程为 $mx^2+ny^2=1$，（m＞0，n＞0，m≠n），

$\therefore \begin{cases} n=1 \\ m+\frac{1}{2}n=1 \end{cases}$，解得 $m=\frac{1}{2}$，n=1，

∴椭圆方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（Ⅱ）设动直线 l 的方程为：$y=kx-\frac{1}{3}$，

由 $\begin{cases} y=kx-\frac{1}{3} \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，得 $(2k^2+1)x^2-\frac{3}{4}kx-\frac{16}{9}=0$，

设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，

则 $x_1+x_2=\frac{4k}{3(2k^2+1)}$，$x_1x_2=-\frac{16}{9(2k^2+1)}$，

假设在 y 上存在定点 M（0，m），满足题设，

则 $\overrightarrow{MA}=(x_1, y_1-m)$，$\overrightarrow{MB}=(x_2, y_2-m)$，

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=x_1x_2+(y_1-m)(y_2-m)$

$=x_1x_2+y_1y_2-m(y_1+y_2)+m^2$

$=x_1x_2+(kx_1-\frac{1}{3})(kx_2-\frac{1}{3})-m(kx_1-\frac{1}{3}+kx_2-\frac{1}{3})+m^2$

$=(k^2+1)x_1x_2-k(\frac{1}{3}+m)(x_1+x_2)+m^2+\frac{2}{3}m+\frac{1}{9}$

$=-\frac{16(k^2+1)}{9(2k^2+1)}-k(\frac{1}{3}+m)\cdot\frac{4k}{3(2k^2+1)}+m^2+\frac{2}{3}m+\frac{1}{9}$

$=\frac{18(m^2-1)k^2+(9m^2+6m-15)}{9(2k^2+1)}$，

由假设得对于任意的 k∈R，$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$恒成立，

即 $\begin{cases} m^2-1=0 \\ 9m^2+m-15=0 \end{cases}$，

解得 m=1.

因此，在 y 轴上存在定点 M，使得以 AB 为直径的圆恒过这个点，点 M 的坐标为（0，1）.

20.【解答】（1）∵$f(x)=\frac{x}{1+x}$，

∴$f(1)=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$，

∵$\{a_n\}$为首项是 1，以 f（1）为公比的等比数列，

∴$a_n=(\frac{1}{2})^{n-1}$，

∵$b_1=\frac{1}{2}$，且 $b_{n+1}=f(b_n)$，

∴$b_{n+1}=f(b_n)=\frac{b_n}{b_n+1}$，两边同时取倒数，

得$\frac{1}{b_{n+1}}=\frac{b_n+1}{b_n}=1+\frac{1}{b_n}$，

∴$\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}=1$，

∴ $\{\frac{1}{b_n}\}$为等差数列，

故$b_n=\frac{1}{n+1}$.

（2）∵ $c_n=a_n(\frac{1}{b_n}-1)=n\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$，

∴$T_n=1\times(\frac{1}{2})^0+2\times(\frac{1}{2})^1+\cdots+n\times(\frac{1}{2})^{n-1}$，

$\frac{1}{2}T_n=1\times\frac{1}{2}+2\times(\frac{1}{2})^2+\cdots+n\times(\frac{1}{2})^n$，

两式相减整理，得$T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}$，

∵$\frac{n+2}{2^{n-1}}>0$，

∴$T_n=4-\frac{n+2}{2^{n-1}}<4$，

∵ $T_{n+1}-T_n=\frac{n+2}{2^{n-1}}-\frac{n+3}{2^n}$

$=\frac{1}{2^n}[2n+4-(n+3)]$

$=\frac{1}{2^n}(n+1)>0$，

∴$\{T_n\}$单调递增，

∴$\{T_n\}_{min}=T_1=1$，

所以 $1\leqslant T_n<4$.