2014 北京海淀高三二模

数　　学（文）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.（5 分）已知全集为 R，集合 A={x|x≥1}，那么集合∁$_R$A 等于（　　）

A. {x|x＞1} B. {x|x＞－1}　C. {x|x＜1} D. {x|x＜－1}

2.（5 分）已知命题 P：∀x∈R，x^2+x－1＜0，则命题¬P 是（　　）

A. ∀x∈R，x^2+x－1≥0B. ∃x∈R，x^2+x－1≥0

C. ∀x∈R，x^2+x－1＞0D. ∃x∈R，x^2+x－1＜0

3.（5 分）下列函数中，既是偶函数又在（0，+∞）上单调递增的是（　　）

A. $y=x^3$ B. y=cosx　C. $y=\frac{1}{x^2}$　D. y=ln|x|

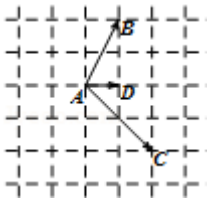
4.（5 分）设 a=$\log_2 3$，b=$\log_4 3$，c=sin90°，则（　　）

A. a＜c＜b　B. b＜c＜a　C. c＜a＜b　D. c＜b＜a

5.（5 分）下面给出的四个点中，位于$\begin{cases}x+y+1>0\\x-y+1<0\end{cases}$表示的平面区域内，且到直线 x－y+1=0 的距离为$\frac{\sqrt{2}}{2}$的点是（　　）

A.（－1，1）　B.（－2，1）　C.（0，3）　D.（1，1）

6.（5 分）已知向量$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$和$\overrightarrow{AB}$在正方形网格中的位置如图所示，若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则 λ＋μ＝（　　）



A. 2　B. －2　C. 3　D. －3

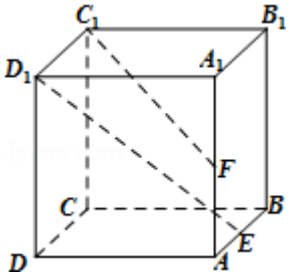
7.（5 分）如图所示，为了测量某湖泊两侧 A、B 间的距离，李宁同学首先选定了与 A、B 不共线的一点 C，然后给出了三种测量方案：（△ABC 的角 A、B、C 所对的边分别记为 a、b、c）：

①测量 A、C、b；②测量 a、b、C；③测量 A、B、a；则一定能确定 A、B 间距离的所有方案的序号为（　　）



A. ①② B. ②③ C. ①③ D. ①②③

8.（5 分）已知点 E、F 分别是正方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$的棱 AB、AA_1的中点，点 M、N 分别是线段 D_1E 与 C_1F 上的点，则满足与平面 ABCD 平行的直线 MN 有（　　）



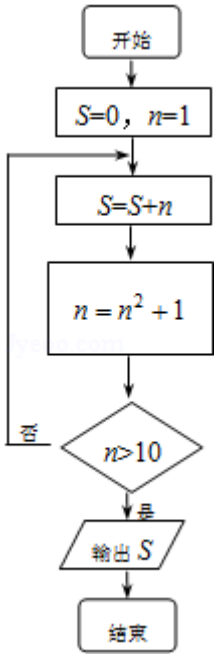
A．0条　B．1条　C．2条　D．无数条

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9．（5分）复数2+i的模等于_____.

10．（5分）若抛物线$y^2=2px$（$p>0$）的准线经过双曲线$x^2-y^2=1$的左顶点，则p=_____.

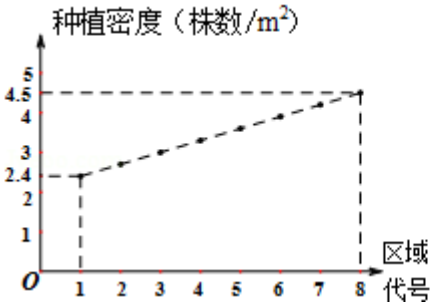
11．（5分）执行如图所示的程序框图，则输出S的值为_____.

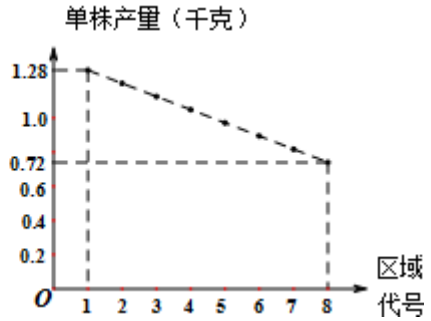


12．（5分）下列函数中：①$y=-\sin 2x$；②$y=\cos 2x$；③$y=3\sin(2x+\frac{\pi}{4})$，其图象仅通过向左（或向右）平移就能与函数$f(x)=\sin 2x$的图象重合的是_____.（填上符合要求的函数对应的序号）

13．（5分）已知实数$a>0$且$a\neq 1$，函数$f(x)=\begin{cases}a^x, & x<3\\ ax+b, & x\geqslant 3\end{cases}$，若数列$\{a_n\}$满足$a_n=f(n)$（$n\in N^*$），且$\{a_n\}$是等差数列，则a=_____，b=_____.

14．（5分）农业技术员进行某种作物的种植密度试验，把一块试验田划分为8块面积相等的区域（除了种植密度，其它影响作物生长的因素都保持一致），种植密度和单株产量统计如图：





根据上表所提供信息，第_____号区域的总产量最大，该区域种植密度为_____株/m^2.

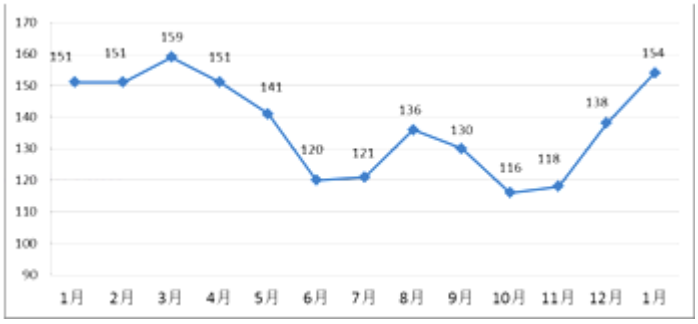
三、解答题：本大题共6小题，共80分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15．（13分）已知函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x+a$，$a\in R$.

（Ⅰ）求函数$f(x)$的最小正周期；

（Ⅱ）若函数$f(x)$有零点，求实数a的取值范围.

16．（13分）如图所示为某地区2012年1月到2013年1月鲜蔬价格指数的变化情况：



记△x=本月价格指数﹣上月价格指数．规定：△x＞0 时，称本月价格指数环比增长；△x＜0 时，称本月价格指数环比下降；当△x=0 时，称本月价格指数环比持平．

（Ⅰ）比较 2012 年上半年与下半年鲜蔬价格指数月平均值的大小（不要求计算过程）；

（Ⅱ）直接写出从 2012 年 2 月到 2013 年 1 月的 12 个月中价格指数环比下降的月份．若从这 12 个月中随机选择连续的两个月进行观察，求所选两个月的价格指数都环比下降的概率；

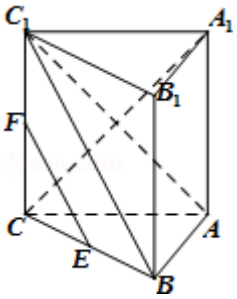
（Ⅲ）由图判断从哪个月开始连续三个月的价格指数方差最大．（结论不要求证明）

17．（14 分）如图，在三棱柱 ABC﹣A_1B_1C 中，AA_1⊥底面 ABC，AB⊥AC，AC=AA_1，E、F 分别是棱 BC、CC_1 的中点．

（Ⅰ）求证：AB⊥平面 AA_1 C_1C；

（Ⅱ）若线段 AC 上的点 D 满足平面 DEF∥平面 ABC_1，试确定点 D 的位置，并说明理由；

（Ⅲ）证明：EF⊥A_1C．



18．（13 分）已知函数 f（x）=$\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x+b$，其中 a、b∈R 且 a≠0．

（Ⅰ）求证：函数 f（x）在点（0，f（0））处的切线与 f（x）总有两个不同的公共点；

（Ⅱ）若函数 f（x）在区间（﹣1，1）上有且仅有一个极值点，求实数 a 的取值范围．

19．（14 分）已知椭圆 G 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，其短轴两端点为 A（0，1），B（0，﹣1）．

（Ⅰ）求椭圆 G 的方程；

（Ⅱ）若 C、D 是椭圆 G 上关于 y 轴对称的两个不同点，直线 AC、BD 与 x 轴分别交于点 M、N．判断以 MN 为直径的圆是否过点 A，并说明理由．

20.（13分）给定正整数k≥3，若项数为k的数列$\{a_n\}$满足：对任意的i=1、2、…、k，均有$a_i \leq \frac{S_k}{k-1}$（其中$S_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$），则称数列$\{a_n\}$为“Γ 数列”.

（Ⅰ）判断数列－1，3，5，2，4和$\frac{3}{4}$，$\frac{3^2}{4^2}$，$\frac{3^3}{4^3}$是否是“Γ 数列”，并说明理由；

（Ⅱ）若$\{a_n\}$为“Γ 数列”，求证：$a_i \geq 0$对i=1，2，…，k恒成立；

（Ⅲ）设$\{b_n\}$是公差为d的无穷项等差数列，若对任意的正整数m≥3，b_1，b_2，…，b_m均构成“Γ 数列”，求$\{b_n\}$的公差d.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【解答】∵全集为 R，集合 A={x|x≥1}，

∴$\complement_R A$={x|x＜1}.

故选：C.

2.【解答】∵对命题：“∀x∈A，¬P（X）”否定是“∃x∈A，P（X）”

∴对命题“∀x∈R，x^2+x﹣1＜0”的否定是“∃x∈R，x^2+x﹣1≥0”

故选 B.

3.【解答】A．函数 $y=x^3$ 为奇函数，在（0，+∞）上单调递增，所以 A 不合适.

B．函数 y=cosx 为偶数，但在（0，+∞）上不单调，所以 B 不合适.

C．函数 $y=\frac{1}{x^2}$ 为偶函数，在（0，+∞）上单调递减，所以 C 不合适.

D．函数 y=ln|x|为偶函数，在（0，+∞）上单调递增，所以 D 合适.

故选 D.

4.【解答】∵$b=\log_4 3<\log_4 4=1$，$c=\sin 90^\circ=1$，$a=\log_2 3>\log_2 2=1$.

∴b＜c＜a.

故选：B.

5.【解答】作出不等式组对应的平面区域，

设到直线 x﹣y+1=0 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的直线为 x﹣y+a=0，

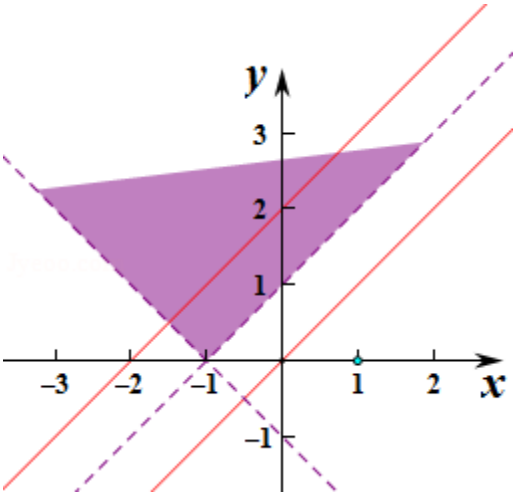
则 $\frac{|a-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即|a﹣1|=1，

解得 a=0 或 a=2，

则对应的直线为 x﹣y=0 或 x﹣y+2=0，

则到直线 x﹣y+1=0 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的点必在直线 x﹣y+2=0 上，

故选：A.



6.【解答】如图所示，建立直角坐标系.

则 $\overrightarrow{AD}$=（1，0），$\overrightarrow{AC}$=（2，－2），$\overrightarrow{AB}$=（1，2）.

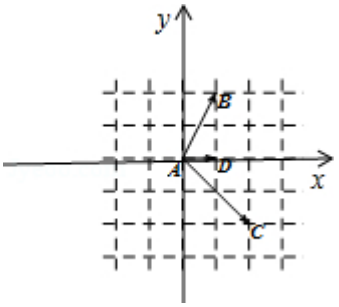
∵ $\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，∴（2，－2）=λ（1，2）+μ（1，0）=（λ+μ，2λ），

$\therefore\begin{cases}2=\lambda+\mu\\-2=2\lambda\end{cases}$，

解得 λ=－1，μ=3.

∴ λ+μ=2.

故选：A.



7.【解答】对于①③可以利用正弦定理确定唯一的 A，B 两点间的距离.

对于②直接利用余弦定理即可确定 A，B 两点间的距离.

故选：D.

8.【解答】取 BB_1 的中点 H，连接 FH，则 $FH/\!/C_1D$，

连接 HE，在 D_1E 上任取一点 M，

过 M 在面 D_1HE 中，作 MG 平行于 HO，

其中 O 为线段 D_1E 的中点，交 D_1H 于 G，

再过 G 作 $GN/\!/FH$，交 C_1F 于 N，连接 MN，

O 在平面 ABCD 的正投影为 K，连接 KB，则 OH∥KB，

由于 GM∥HO，HO∥KB，KB⊂平面 ABCD，

GM⊄平面 ABCD，

所以 GM∥平面 ABCD，

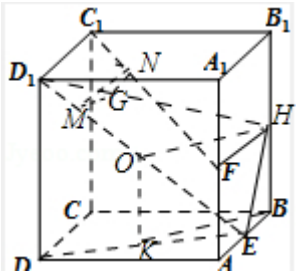
同理由 NG∥FH，可推得 NG∥平面 ABCD，

由面面平行的判定定理得，平面 MNG∥平面 ABCD，

则 MN∥平面 ABCD.

由于 M 为 D_1E 上任一点，故这样的直线 MN 有无数条.

故选：D.



二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】∵z=2+i，

∴$|z|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

故答案为：$\sqrt{5}$.

10.【解答】双曲线 $x^2-y^2=1$ 的左顶点为（－1，0），

故抛物线 $y^2=2px$ 的准线为 x=－1，

∴$\frac{p}{2}=1$，∴p=2，

故答案为：2.

11.【解答】由程序框图知：第一次循环 S=1，n=2；

第二次循环 S=1+2=3，$n=2^2+1=5$；

第三次循环 S=3+5=8．$n=5^2+1=26$.

满足条件 n＞10，跳出循环体，输出 S=8.

故答案为：8.

12.【解答】把 y=－sin2x 的图象向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位，即可得到 y=－sin2（$x+\frac{\pi}{2}$）=sin2x 的图象，故①满足条件.

把 y=cos2x=sin（2x+$\frac{\pi}{2}$）的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位，即可得到 y=sin[2（x－$\frac{\pi}{4}$）+$\frac{\pi}{2}$]=sin2x 的图象，

故②满足条件.

对于③y=3sin（2x+$\frac{\pi}{4}$），无论向左或向右平移多少个单位，图象上各点的纵坐标不变，

故不能通过向左（或向右）平移的方法，使它的图象与函数 f（x）=sin2x 的图象重合，故③不满足条件.

故答案为：①②.

13.【解答】∵函数 f（x）=$\begin{cases} a^x, & x<3 \\ ax+b, & x\geqslant 3 \end{cases}$，

∴$a_n=\begin{cases} a^n, & n<3 \\ an+b, & n\geqslant 3 \end{cases}$，

∴$a_1=a$，$a_2=a^2$，$a_3=3a+b$，$a_4=4a+b$，$a_5=5a+b$，…，$a_n=na+b$，

∵$\{a_n\}$是等差数列，

∴$a^2-a=a$，即有 a=0（舍去）或 2，

∴$3a+b-a^2=a$，即 b=0，

故答案为：2，0.

14.【解答】种植密度函数对应的直线经过点（1，2.4），（8，4.5），

则对应直线的斜率 k=$\frac{4.5-2.4}{8-1}=\frac{2.1}{7}=0.3$，

则直线方程为 y－2.4=0.3（x－1），即 y=0.3x+2.1，

单株产量函数对应的直线经过点（1，1.28），（8，0.72），

则对应直线的斜率 k=$\frac{1.28-0.72}{1-8}=\frac{0.56}{-7}=-0.08$，

则直线方程为 y－1.28=－0.08（x－1），即 y=－0.08x+1.36，

即总产量 m（x）=（0.3x+2.1）（－0.08x+1.36）=－0.024（x+7）（x－17）=－0.024（x^2－10x－119），

∴当 x=5 时，函数 m（x）有最大值，即 5 号区域的总产量最大，

此时当 x=5 代入 y=0.3x+2.1 得 y=0.3×5+2.1=3.6，

故答案为：5，3.6.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.【解答】（Ⅰ）∵f（x）=$\sqrt{3}$sin2x+cos2x+a－1

=2sin（2x+$\frac{\pi}{6}$）+a－1，

∴T=$\frac{2\pi}{2}$=π，

∴函数 f（x）的最小正周期为 π．

（Ⅱ）令 f（x）=0，即 $2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+a-1=0$，

则 $a=1-2\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

∵ $-1\leqslant\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant1$，

∴ $-1\leqslant1-2\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant3$，

∴若 f（x）有零点，则实数 a 的取值范围是[－1，3]．

16.【解答】（Ⅰ）上半年的鲜疏价格的月平均值大于下半年的鲜疏价格的月平均值．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－－（4 分）

（Ⅱ）从 2012 年 2 月到 2013 年 1 月的 12 个月中价格指数环比下降的月份有

4 月、5 月、6 月、9 月、10 月．－－－－－－－－－－－－－－－－－－－

（III）证明：∵三棱柱 ABC－$A_1B_1C_1$ 中，$A_1A=AC$，

∴侧面 A_1ACC_1 是菱形，

∴$A_1C\perp AC_1$，（9 分）

由（Ⅰ）得 $AB\perp A_1C$，

∵$AB\cap AC_1=A$，

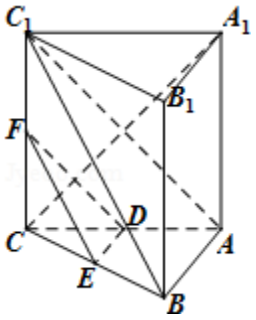
∴$A_1C\perp$面 ABC_1，（11 分）

∴$A_1C\perp BC_1$.（12 分）

又∵E，F 分别为棱 BC，CC_1 的中点，

∴$EF/\!/BC_1$，（13 分）

∴$EF\perp AC_1$.（14 分）



18.【解答】（Ⅰ）$f'(x)=x^2+2ax+4$，

∴$f'(0)=4$，且 $f(0)=b$；

∴在点（0，$f(0)$）处的切线方程为：$y=4x+b$；

解 $\begin{cases}y=4x+b\\ y=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x+b\end{cases}$

得：$x=0$，或 $x=-3a$；

∵$a\neq 0$，方程组有两个不同解，

∴切线与 $f(x)$ 总有两个不同的公共点.

（Ⅱ）

法一：$f'(x)=x^2+2ax+4=(x+a)^2+4-a^2$，

根据题意可知：$4-a^2<0$　　①

方程 $x^2+2ax+4=0$ 有两个实数根，$x=-a-\sqrt{a^2-4}$，或 $x=-a+\sqrt{a^2-4}$；

∴$\begin{cases}-1<-a-\sqrt{a^2-4}<1\\ -a+\sqrt{a^2-4}>1\end{cases}$ ②

或$\begin{cases}-1<-a+\sqrt{a^2-4}<1\\-a-\sqrt{a^2-4}<-1\end{cases}$③

∴解①得：a＜﹣2，或 a＞2；

当 a＜﹣2，或 a＞2 时②的解是：a＜$-\frac{5}{2}$；

当 a＜﹣2，或 a＞2 时③的解是：a＞$\frac{5}{2}$.

∴a 的取值范围是：（﹣∞，$-\frac{5}{2}$）∪（$\frac{5}{2}$，+∞）.

法二：∵f（x）在区间（﹣1，1）上有且仅有一个极值点，

∴由二次函数图象性质可得 f′（﹣1）f′（1）＜0

即（5﹣2a）（5+2a）＜0，

解得 a＜$-\frac{5}{2}$或 a＞$\frac{5}{2}$，

∴a 的取值范围是：（﹣∞，$-\frac{5}{2}$）∪（$\frac{5}{2}$，+∞）.

19.【解答】（Ⅰ）∵椭圆 G 的离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，其短轴两端点为 A（0，1），B（0，﹣1），

∴设椭圆 G 的方程为：$\frac{x^2}{a^2}+y^2=1$，（a＞1）.

由 e=$\frac{\sqrt{2}}{2}$，得 $e^2=\frac{a^2-1}{a^2}=\frac{1}{2}$，

解得 $a^2=2$，

∴椭圆的标准方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$.

（Ⅱ）以 MN 为直径的圆是不过点 A．理由如下：

∵C、D 是椭圆 G 上关于 y 轴对称的两个不同点，

∴设 C（x_0，y_0），且 $x_0\neq0$，则 D（﹣x_0，y_0）.

∵A（0，1），B（0，﹣1），∴直线 AC 的方程为 y=$\frac{y_0-1}{x_0}x+1$.

令 y=0，得 $x_M=\frac{-x_0}{y_0-1}$，∴M（$\frac{-x_0}{y_0-1}$，0）.

同理直线 BD 的方程为 y=$\frac{y_0+1}{-x_0}x-1$，令 y=0，解得 N（$\frac{-x_0}{y_0+1}$，0）.

$\overrightarrow{AM}=(\frac{x_0}{1-y_0},-1)$，$\overrightarrow{AN}=(\frac{-x_0}{1+y_0},-1)$，

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=\frac{-x_0^2}{1-y_0^2}+1$，

由 C（x_1，y_1）在椭圆 G：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$上，$\therefore x_0^2=2(1-y_0^2)$，

$\therefore \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}=-1\neq 0$，

$\therefore \angle MAN\neq 90°$，

∴以线段 MN 为直径的圆不过点 A.

20.【解答】（Ⅰ）①因为$\frac{S_5}{5-1}=\frac{13}{4}<5$，数列﹣1，3，5，2，4 不是“Γ 数列，

②因为$\frac{S_3}{3-1}=\frac{111}{128}>\frac{3}{4}$，又$\frac{3}{4}$是数列$\frac{3}{4}$，$\frac{3^2}{4^2}$，$\frac{3^3}{4^3}$中的最大项

所以数列$\frac{3}{4}$，$\frac{3^2}{4^2}$，$\frac{3^3}{4^3}$是“Γ 数列”.

（Ⅱ）反证法证明：

假设存在某项 $a_i<0$，则

$a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{k-1}+a_k=S_k-a_i>S_k$.

设 $a_j=\max\{a_1，a_2，\cdots a_{i-1}，a_{i+i}\cdots，a_{k-1}+a_k\}$，

则 $S_k-a_i=a_1+a_2+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{k-1}+a_k\leqslant（k-1）a_j$，

所以 $（k-1）a_j>S_k$，即 $a_j>\frac{S_k}{k-1}$，

这与“Γ 数列”定义矛盾，所以原结论正确.

（Ⅲ）由（Ⅱ）问可知 $b_1\geqslant 0$，$d\geqslant 0$.

①当 d=0 时，$b_1=b_2=\cdots=b_m=\frac{S_m}{m}<\frac{S_m}{m-1}$，符合题设；

②当 $d>0$ 时，$b_1<b_2<\cdots<b_m$，

由“Γ 数列”的定义可知 $b_m\leqslant\frac{S_m}{m-1}$，即 $（m-1）[b_1+（m-1）d]\leqslant mb_1+\frac{1}{2}m（m-1）d$，

整理得 $（m-1）（m-2）d\leqslant 2b_1$（*）

显然当 $m=2b_1+3$ 时，上述不等式（*）就不成立

所以 $d>0$ 时，对任意正整数 $m\geqslant 3$，$（m-1）（m-2）d\leqslant 2b_1$ 不可能都成立.

综上讨论可知$\{b_n\}$的公差 d=0.