2014 北京朝阳高三二模

数　　学（文）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．（5 分）若全集 U={a，b，c，d}，A={a，b}，B={c}，则集合{d}等于（　　）

A．$\complement_U$（A∪B）　B．A∪B　　C．A∩B　　D．$\complement_U$（A∩B）

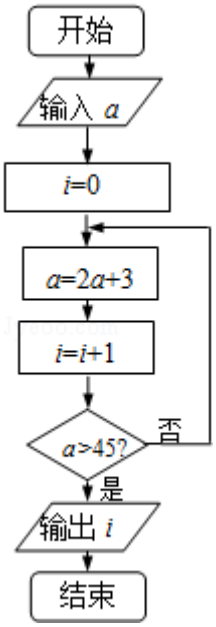
2．（5 分）下列函数中，既是奇函数又是区间（0，+∞）上的增函数的是（　　）

A．$y=x^{\frac{1}{2}}$　B．$y=x^{-1}$　　C．$y=x^3$ D．$y=2^x$

3．（5 分）已知抛物线 $x^2=2y$，则它的焦点坐标是（　　）

A．（$\frac{1}{4}$，0）　　B．（0，$\frac{1}{2}$）　　C．（0，$\frac{1}{4}$）　　D．（$\frac{1}{2}$，0）

4．（5 分）执行如图所示的程序框图．若输入 a=3，则输出 i 的值是（　　）



A．2　　B．3　　C．4　　D．5

5．（5 分）由直线 x﹣y+1=0，x+y﹣5=0 和 x﹣1=0 所围成的三角形区域（包括边界）用不等式组可表示为（　　）

A．$\begin{cases}x-y+1\leqslant 0\\x+y-5\leqslant 0\\x\geqslant 1\end{cases}$　B．$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x+y-5\leqslant 0\\x\geqslant 1\end{cases}$

C．$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\x+y-5\geqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$　D．$\begin{cases}x-y+1\leqslant 0\\x+y-5\leqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$

6．（5 分）在区间[﹣π，π]上随机取一个数 x，则事件：“cosx≥0”的概率为（　　）

A．$\frac{1}{4}$　B．$\frac{3}{4}$　C．$\frac{2}{3}$　D．$\frac{1}{2}$

7．（5 分）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，前 n 项和为 S_n．若 $a_1=d=1$，则$\frac{S_n+8}{a_n}$的最小值为（　　）

A．10　B．$\frac{9}{2}$　C．$\frac{7}{2}$　D．$\frac{1}{2}+2\sqrt{2}$

8．（5 分）已知平面上点 $P\in\{(x，y)|(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=16$，其中 $x_0^2+y_0^2=4$，当 x_0，y_0 变化时，则满足条件的点 P 在平面上所组成图形的面积是（　　）

A．4π　B．16π　C．32π　D．36π

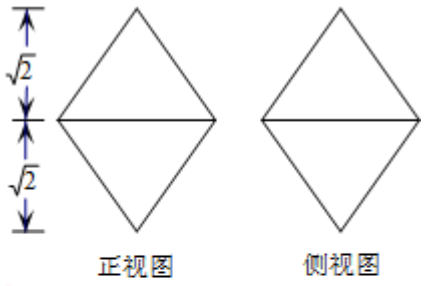
二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

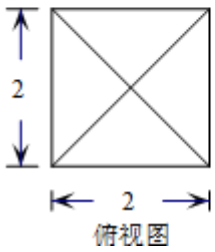
9．（5 分）计算$\frac{1+2i}{1-i}$=_____．

10．（5 分）已知两点 A（1，1），B（－1，2），若 $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，则 C 点坐标是_____．

11．（5 分）圆心在 x 轴上，半径长是 4，且与直线 x=5 相切的圆的方程是_____．

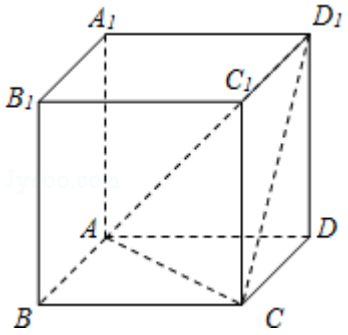
12．（5 分）由两个四棱锥组合而成的空间几何体的三视图如图所示，其体积是_____；表面积是_____．





13．（5 分）设一列匀速行驶的火车，通过长 860m 的隧道时，整个车身都在隧道里的时间是 22s．该列车以同样的速度穿过长 790m 的铁桥时，从车头上桥，到车尾下桥，共用时 33s，则这列火车的长度为_____m．

14．（5 分）在如图所示的棱长为 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，作与平面 ACD_1 平行的截面，则截得的三角形中面积最大的值是_____；截得的平面图形中面积最大的值是_____．



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（13 分）在△ABC 中，a，b，c 分别是角 A，B，C 的对边．已知 $a=2\sqrt{3}$，$A=\frac{\pi}{3}$．

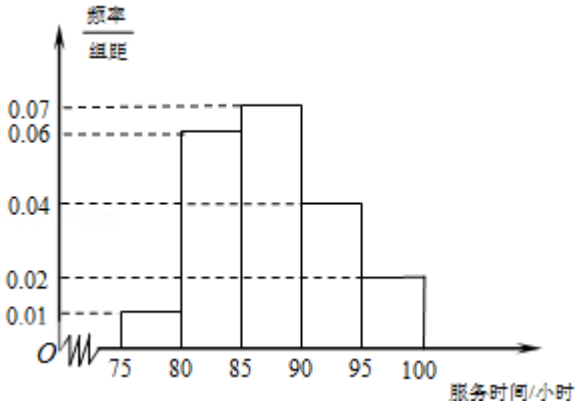
（Ⅰ）若 $b=2\sqrt{2}$，求角 C 的大小；

（Ⅱ）若 c=2，求边 b 的长．

16．（13 分）某市规定，高中学生在校期间须参加不少于 80 小时的社区服务才合格．某校随机抽取 20 位学生参加社区服务的数据，按时间段[75，80），[80，85），[85，90），[90，95），[95，100]（单位：小时）进行统计，其频率分布直方图如图所示．

（Ⅰ）求抽取的 20 人中，参加社区服务时间不少于 90 小时的学生人数；

（Ⅱ）从参加社区服务时间不少于 90 小时的学生中任意选取 2 人，求所选学生的参加社区服务时间在同一时间段内的概率．

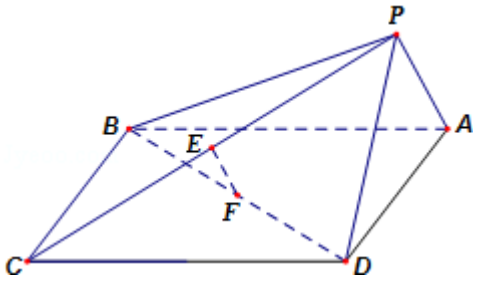


17．（14 分）如图，在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是正方形，侧面 PAD⊥底面 ABCD．

（Ⅰ）若 E，F 分别为 PC，BD 中点，求证：EF∥平面 PAD；

（Ⅱ）求证：PA⊥CD；

（Ⅲ）若 $PA=PD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，求证：平面 PAB⊥平面 PCD．



18.（13 分）已知函数 f（x）=$\frac{a\cdot e^{x}}{x}$（a∈R，a≠0）.

（Ⅰ）当 a=1 时，求曲线 f（x）在点（1，f（1））处切线的方程；

（Ⅱ）求函数 f（x）的单调区间；

（Ⅲ）当 x∈（0，+∞）时，若 f（x）≥1 恒成立，求 a 的取值范围.

19.（14 分）已知椭圆 C 的中心在原点 O，焦点在 x 轴上，离心率为$\frac{1}{2}$，右焦点到右顶点的距离为 1.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）若直线 l：mx+y+1=0 与椭圆 C 交于 A，B 两点，是否存在实数 m，使$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$成立？若存在，求 m 的值；若不存在，请说明理由.

20.（13 分）已知函数 f（x）对任意 x，y∈R 都满足 f（x+y）=f（x）+f（y）+1，且 f（$\frac{1}{2}$）=0，数列{a_n}满足：a_n=f（n），n∈N^*.

（Ⅰ）求 f（0）及 f（1）的值；

（Ⅱ）求数列{a_n}的通项公式；

（Ⅲ）若 $b_n=(\frac{1}{4})^{a_n}-(\frac{1}{2})^{3+a_n}$，试问数列{$b_n$}是否存在最大项和最小项？若存在，求出最大项和最小项；若不存在，请说明理由.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】∵全集 U={a，b，c，d}，A={a，b}，B={c}，

∴A∪B={a，b，c}，

则∁$_U$（A∪B）={d}．

故选：A．

2.【解答】$y=x^{\frac{1}{2}}$定义域为[0，+∞），不关于原点对称，不具有奇偶性；$y=x^{-1}$为（0，+∞）上减函数；对于 $y=2^x$，是指数函数，不具有奇偶性；$y=x^3$ 是幂函数，指数大于零为增函数；又 f（﹣x）=f（x）所以是奇函数．

故选 C

3.【解答】∵抛物线方程为 $x^2=2y$，

∴2p=2，p=1，

∵焦点在 y 轴上，

∴抛物线焦点为（0，$\frac{1}{2}$），

故选 B

4.【解答】当 a=9 时，i=1；

当 a=21 时，i=2；

当 a=45 时，i=3；

当 a=93 时，i=4；结束循环

故选：C

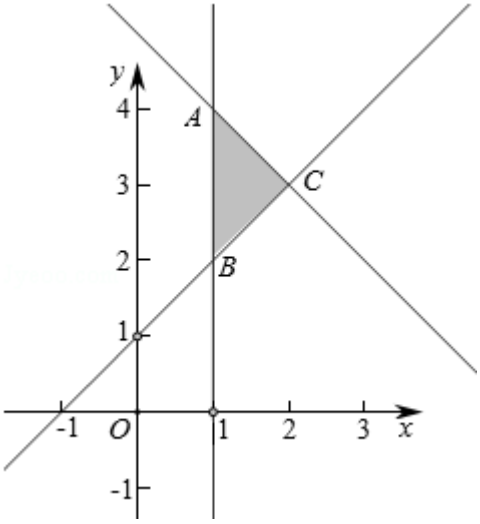
5.【解答】作出对应的平面区域，则三角形区域在直线 x=1 的右侧，∴x≥1，

在 x﹣y+1=0 的上方，则 x﹣y+1≤0，

在 x+y﹣5=0 的下方，则 x+y﹣5≤0，

则用不等式组表示为$\begin{cases}x-y+1\leqslant 0\\ x+y-5\leqslant 0\\ x\geqslant 1\end{cases}$，

故选：A.



6.【解答】在[﹣π，π]由 cosx≥0 得 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$，

则由几何概型的概率公式可得："cosx≥0"的概率 $P=\frac{\frac{\pi}{2}-(-\frac{\pi}{2})}{\pi-(-\pi)}=\frac{\pi}{2\pi}=\frac{1}{2}$，

故选：D

7.【解答】∵等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，前 n 项和为 S_n．$a_1=d=1$，

$$\therefore \frac{S_n+8}{a_n}=\frac{n+\frac{n(n-1)}{2}+8}{1+n-1}$$

$$=1+\frac{n-1}{2}+\frac{8}{n}$$

$$=\frac{n}{2}+\frac{8}{n}+\frac{1}{2}$$

$$\geqslant 2\sqrt{\frac{n}{2}\cdot\frac{8}{n}}+\frac{1}{2}=\frac{9}{2},$$

当且仅当$\frac{n}{2}=\frac{8}{n}$，即 n=4 时，$\frac{S_n+8}{a_n}$取最小值$\frac{9}{2}$.

故选：B.

8.【解答】由题意可得，点 P 在圆）|（x﹣x_0）^{2}+（y﹣y_0）^{2}=16 上，

而且圆心（x_0，y_0）在以原点为圆心，以 2 为半径的圆上.

满足条件的点 P 在平面内所组成的图形的面积是以 6 为半径的圆的面积减去以 2 为半径的圆的面积，

即 36π﹣4π=32π，

故选：C.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9.【解答】原式=$\frac{(1+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-1+3i}{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，

故答案为：$-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$，

10.【解答】∵ $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$，

∴ $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{2}[(-1,\ 2)+(1,\ 1)]$

$=(0,\ \frac{3}{2})$.

故答案为：$(0,\ \frac{3}{2})$.

11.【解答】设圆心的坐标为（a，0），则圆心到直线 x=5 的距离等于半径，

即|a﹣5|=4，求得 a=1，或 a=9，

故所求的圆的方程为（x﹣1）^{2}+y^2=16 和（x﹣9）^{2}+y^2=16，

故答案为：（x﹣1）^{2}+y^2=16 和（x﹣9）^{2}+y^2=16.

12.【解答】由三视图知：几何体为两个完全相同的正四棱锥底面对接的组合体，

四棱锥的底面边长为 4，高为$\sqrt{2}$，∴侧面上的斜高为$\sqrt{3}$，

∴几何体的体积 V=2×$\frac{1}{3}$×2^2×$\sqrt{2}$=$\frac{8\sqrt{2}}{3}$；

几何体的表面积 S=8×$\frac{1}{2}$×2×$\sqrt{3}$=$8\sqrt{3}$.

故答案为：$\frac{8\sqrt{2}}{3}$，$8\sqrt{3}$.

13.【解答】设列车长度为 x，则由题意得在桥上的速度为$\frac{790+x}{33}$，

则隧道里速度为$\frac{860-x}{22}$，

则有$\frac{790+x}{33}=\frac{860-x}{22}$，

解得 x=200，

故答案为：200

14．【解答】截得的三角形中面积最大是以正方体的表面正方形的对角线所构成的等边三角形，如图中的△A_1C_1B，

∵正方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，

∴$A_1C_1=C_1B=A_1B=2\sqrt{2}$，

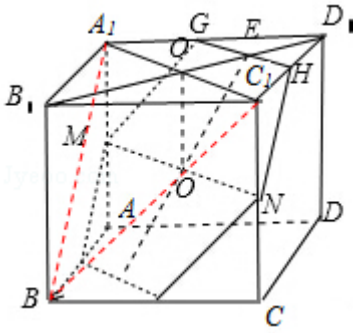
∴$S_{△A1C1B}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{2}=2\sqrt{3}$，

如图平面 α 截正方体所得截面为正六边形，此时，截面面积最大，其中 $MN=2\sqrt{2}$，$GH=\sqrt{2}$，$OE=\sqrt{1+\frac{1}{2}}$

$=\frac{\sqrt{6}}{2}$，

截面面积 $S=2\times\frac{\sqrt{2}+2\sqrt{2}}{2}\times OE=3\sqrt{3}$.

故答案为：$2\sqrt{3}$，$3\sqrt{3}$.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．【解答】（Ⅰ）由正弦定理$\frac{a}{sinA}=\frac{b}{sinB}$，

∴$sinB=\frac{b}{a}\cdot sinA=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$B=\frac{\pi}{4}$或$\frac{3\pi}{4}$，

∵b＜a，

∴$B=\frac{\pi}{4}$，

∴$C=\pi-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$.

（Ⅱ）依题意，$cosA=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，即$\frac{1}{2}=\frac{b^2+4-12}{4b}$.

∴b^2﹣2b﹣8=0，

又 b＞0，

∴b=4．

16．【解答】（Ⅰ）由题意可知，

参加社区服务在时间段[90，95）的学生人数为 20×0.04×5=4（人），

参加社区服务在时间段[95，100]的学生人数为 20×0.02×5=2（人）．

所以参加社区服务时间不少于 90 小时的学生人数为 4+2=6（人）．

…（5 分）

（Ⅱ）设所选学生的服务时间在同一时间段内为事件 A．

由（Ⅰ）可知，

参加社区服务在时间段[90，95）的学生有 4 人，记为 a，b，c，d；

参加社区服务在时间段[95，100]的学生有 2 人，记为 A，B．

从这 6 人中任意选取 2 人有 ab，ac，ad，aA，aB，bc，bd，bA，bB，cd，cA，cB，dA，dB，AB 共 15 种情况．

事件 A 包括 ab，ac，ad，bc，bd，cd，AB 共 7 种情况．

所以所选学生的服务时间在同一时间段内的概率 $P(A)=\frac{7}{15}$．…（13 分）

17．【解答】（Ⅰ）证明：如图，连结 AC．因为底面 ABCD 是正方形，

所以 AC 与 BD 互相平分．

又因为 F 是 BD 中点，所以 F 是 AC 中点．

在△PAC 中，E 是 PC 中点，F 是 AC 中点，

所以 EF∥PA．

又因为 EF⊄平面 PAD，PA⊂平面 PAD，

所以 EF∥平面 PAD．…（4 分）

（Ⅱ）证明：因为平面 PAD⊥底面 ABCD，

且平面 PAD∩平面 ABCD=AD，

又 CD⊥AD，所以 CD⊥面 PAD．

又因为 PA⊂平面 PAD，

所以 CD⊥PA．故 PA⊥CD．…（9 分）

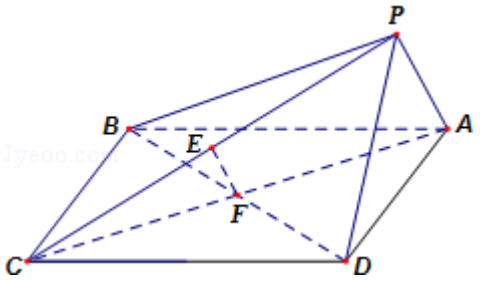
（Ⅲ）证明：在△PAD 中，因为 $PA=PD=\frac{\sqrt{2}}{2}AD$，

所以 PA⊥PD.

由（Ⅱ）可知 PA⊥CD，且 CD∩PD=D，
所以 PA⊥平面 PCD.

又因为 PA⊂平面 PAB，

所以面 PAB⊥平面 PCD．…（14 分）



18.【解答】（Ⅰ）由 f（x）=$\frac{a\cdot e^x}{x}$，得：

$f'(x)=\frac{ax\cdot e^x-ae^x}{x^2}=\frac{ae^x(x-1)}{x^2}$，x≠0.

当 a=1 时，$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$.

依题意 f'（1）=0，即在 x=1 处切线的斜率为 0.

把 x=1 代入 $f(x)=\frac{e^x}{x}$中，得 f（1）=e.

则曲线 f（x）在 x=1 处切线的方程为 y=e.

（Ⅱ）函数 f（x）的定义域为{x|x≠0}.

由于 $f'(x)=\frac{ax\cdot e^x-ae^x}{x^2}=\frac{ae^x(x-1)}{x^2}$.

①若 a＞0，

当 x＞1 时，f′（x）＞0，函数 f（x）为增函数；

当 x＜0 和 0＜x＜1 时，f′（x）＜0，函数 f（x）为减函数.

②若 a＜0，

当 x＜0 和 0＜x＜1 时，f′（x）＞0，函数 f（x）为增函数；

当 x＞1 时，f′（x）＜0，函数 f（x）为减函数.

综上所述，a＞0 时，函数 f（x）的单调增区间为（1，+∞）；单调减区间为（－∞，0），（0，1）.

a＜0 时，函数 f（x）的单调增区间为（－∞，0），（0，1）；单调减区间为（1，+∞）.

（Ⅲ）当 x∈（0，+∞）时，要使 f（x）=$\frac{a\cdot e^x}{x}\geqslant 1$恒成立，

即使 $a\geqslant\frac{x}{e^x}$在 x∈（0，+∞）时恒成立．

设 $g(x)=\frac{x}{e^x}$，则 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$．

可知在 0＜x＜1 时，g′（x）＞0，g（x）为增函数；

x＞1 时，g′（x）＜0，g（x）为减函数．

则 $g(x)_{max}=g(1)=\frac{1}{e}$．

从而 $a\geqslant\frac{1}{e}$．

19．【解答】（Ⅰ）设椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0），半焦距为 c．

依题意$\begin{cases}e=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\\ a-c=1.\end{cases}$解得 c=1，a=2，所以 $b^2=a^2-c^2=3$．

所以椭圆 C 的标准方程是$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．

（Ⅱ）不存在实数 m，使 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，证明如下：

把 y=﹣mx﹣1 代入椭圆 C：$3x^2+4y^2=12$ 中，整理得（$3+4m^2$）$x^2+8mx-8=0$．

由于直线 l 恒过椭圆内定点（0，﹣1），所以判别式△＞0．

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），则 $x_1+x_2=-\frac{8m}{4m^2+3}$，$x_1\cdot x_2=\frac{-8}{4m^2+3}$．

依题意，若 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$，平方得 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$．

即 $x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+$（﹣mx_1﹣1）•（﹣mx_2﹣1）=0，

整理得（m^2+1）x_1x_2+m（x_1+x_2）+1=0，

所以（m^2+1）$\frac{-8}{4m^2+3}-\frac{8m^2}{4m^2+3}+1=0$，

整理得 $m^2=-\frac{5}{12}$，矛盾．

所以不存在实数 m，使 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}|$．

20.【解答】（Ⅰ）在 f（x+y）=f（x）+f（y）+1 中，取 x=y=0，得 f（0）=﹣1，

在 f（x+y）=f（x）+f（y）+1 中，取 x=y=$\frac{1}{2}$，得 f（1）=1，

（Ⅱ）在 f（x+y）=f（x）+f（y）+1 中，令 x=n，y=1，

得 f（n+1）=f（n）+2，即 $a_{n+1}-a_n=2$，

所以数列{a_n}是等差数列，公差为 2，又首项 $a_1=f（1）=1$，所以 $a_n=2n-1$，$n\in N^*$.

（Ⅲ）数列{b_n}存在最大项和最小项，

令 $t=(\frac{1}{2})^{a_n}=(\frac{1}{2})^{2n-1}$，则 $b_n=t^2-\frac{1}{8}t=(t-\frac{1}{16})^2-\frac{1}{256}$，

显然 $0<t\leqslant\frac{1}{2}$，又因为 $n\in N^*$，

所以当 $t=\frac{1}{2}$，即 n=1 时，数列{b_n}的最大项为 $b_1=\frac{3}{16}$.

当 $t=\frac{1}{32}$，即 n=3 时，数列{b_n} 的最小项为 $b_3=-\frac{3}{1024}$.