2014 北京房山高三二模

数　　学（文）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.（5 分）若 a∈R，i 为虚数单位，且（a﹣i）i=1+2i，则 a=（　　）

A．﹣1　B．0　　C．1　　D．2

2.（5 分）双曲线的$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$（a＞0）的一条渐近线方程是 y=$\frac{2}{3}$x，则 a=（　　）

A．$\sqrt{3}$　B．3　　C．6　　D．9

3.（5 分）若向量$\vec{a}$、$\vec{b}$的夹角为 60°，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，则$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$=（　　）

A．1+$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B．1﹣$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\frac{3}{2}$　　D．$\frac{1}{2}$

4.（5 分）已知 a＞1，$\log_a x<\log_a y<0$，则（　　）

A．1＜x＜y　B．1＜y＜x　C．0＜x＜y＜1　　D．0＜y＜x＜1

5.（5 分）已知命题 p：y=cosx 是偶函数，命题 q：∃x∈R，sinx=2，则下列判断正确的是（　　）

A．¬p 是真命题　B．¬q 是假命题　C．p∧q 是真命题 D．¬p∨q 是假命题

6.（5 分）将函数 y=sin2x 的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位后，所得图象的一条对称轴方程是（　　）

A．x=$\frac{\pi}{8}$　　B．x=﹣$\frac{\pi}{8}$　　C．x=$\frac{\pi}{4}$　　D．x=﹣$\frac{\pi}{4}$

7.（5 分）对任意两实数 a，b，定义运算“*”：a*b=$\begin{cases}a, & a\geqslant b\\ b, & a<b\end{cases}$，关于函数 f（﹣x）=$e^{-x}*e^{x}$，给出下列四个结论：

①函数 f（x）的最小值是 e；

②函数 f（x）为偶函数；

③函数 f（x）在（0，+∞）上单调递增；

④函数 f（x）的图象与直线 y=ex 没有公共点；

其中正确结论的序号是（　　）

A．①③ B．②③ C．①④ D．②④

8.（5 分）已知 A（0，1），B（1，0），点 C 在抛物线 $y^2=2x$ 的图象上，若△ABC 的面积大于$\frac{3}{2}$，则点 C 纵坐标的取值范围为（　　）

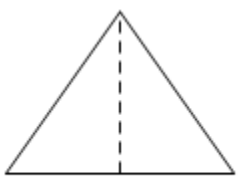
A．（﹣4，2）　　B．（﹣2，4）　　C．（﹣∞，﹣4）∪（2，+∞）　D．（﹣∞，﹣2）∪（4，+∞）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9.（5 分）某校高三年级共 400 名学生，现用分层抽样的方法随机抽取 32 人进行健康调查．若男生抽取了 12 人，则高三年级共有女生_____人．

10.（5 分）直线 $x+\sqrt{3}y=0$ 被圆 $x^2+y^2-4y=0$ 截得的弦长为_____.

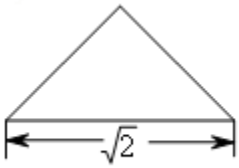
11.（5 分）一个体积为$\frac{1}{6}$的三棱锥的三视图如图所示，其俯视图是一个等腰直角三角形，则这个三棱锥左视图的面积为_____.



主视图



左视图



俯视图

12.（5 分）设不等式组$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$表示的平面区域为 D，在区域 D 内任取一点 P（x_0，y_0），则点 P 满足 $y_0<2x_0$ 的概率为_____.

13.（5 分）某房地产开发公司用 800 万元购得一块土地，该土地可以建造每层 1000 平方米的楼房，已知第一层每平方米的建筑费用为 600 元，楼房每升高一层，每平方米的建筑费用增加 40 元．若把楼房建成 n 层后，每平方米的平均综合费用最低（综合费用是建筑费用与购地费用之和），则 n=_____.

14.（5 分）设集合 $P_n=\{1，2，…，n\}$，$n\in N^*$，设集合 A 同时满足以下三个条件：①$A\subseteq P_n$；②若 $x\in A$，则 $2x\notin A$；③若 $x\in\complement_{P_n}A$，则 $2x\notin\complement_{P_n}A$．当 n=4 时，写出一个满足条件的集合 A_____；当 N=9 时，满足条件的集合 A 的个数为_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（13 分）在△ABC 中，已知 $\cos2C=-\frac{1}{9}$，C 为锐角．

（Ⅰ）求 sinC 的值；

（Ⅱ）若 a=2，△ABC 的面积为$\sqrt{5}$，求 c 的值．

16.（13 分）已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，且 $q<0$，其中 a_1，$3a_3$，a_2 成等差数列．

（Ⅰ）求 q 的值；

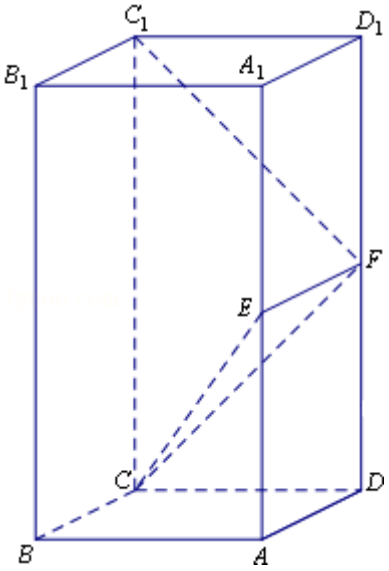
（Ⅱ）设$\{b_n\}$是以 2 为首项，q 为公差的等差数列，其前 n 项和为 S_n，求使 $S_n>0$ 成立的最大正整数 n.

17.（14 分）在长方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，E，F 分别是 AA_1，DD_1 的中点.

（Ⅰ）求证：B_1C_1∥平面 EFC；

（Ⅱ）求证：C_1F⊥平面 EFC；

（Ⅲ）在棱 BB_1 上是否存在一点 P，使得平面 ADP⊥平面 EFC？若存在，求出$\frac{BP}{BB_1}$的值；若不存在，请说明理由.



18.（14 分）已知函数 f（x）=lnx+$\frac{2a}{x}$，a∈R.

（Ⅰ）若函数 f（x）在 x=1 处取得极值，求 a 的值；

（Ⅱ）若函数 f（x）的图象上的点都在直线 y=2 的上方，求 a 的取值范围.

19.（13 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的两个焦点分别为 F_1（－1，0），F_2（1，0），短轴的一个端点为 M，△MF_1F_2 为等边三角形.

（Ⅰ）求椭圆 C 的标准方程；

（Ⅱ）过点（0，－2）的直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，在直线 y=－$\frac{1}{2}$上是否存在点 N，使得四边形 OANB 为矩形？若存在，求出 N 点坐标；若不存在，请说明理由.

20.（13 分）定义在区间（0，+∞）上的函数 f（x）满足：①f（x）不恒为零；②对任意 x∈R^+，a∈R 都有 f（x^a）=af（x）.

（Ⅰ）若 f（2）=1，求 f（$\sqrt{2}$）的值；

（Ⅱ）求证：方程 f（x）=0 有且只有一个实数根；

（Ⅲ）若 f（x）在（0，+∞）上单调递增，且 m＞n＞0 时，有|f（m）|=|f（n）|=2|f（$\frac{m+n}{2}$）|，求证：3＜m＜2+$\sqrt{2}$.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】∵（a﹣i）i=1+2i，

∴﹣i•i（a﹣i）=﹣i（1+2i），

∴a﹣i=﹣i+2，

∴a=2.

故选：D.

2.【解答】∵双曲线的$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{4}=1$（a＞0）的一条渐近线方程是 y=$\frac{2}{3}$x，

∴$\frac{2}{a}=\frac{2}{3}$，

∴a=3.

故选：B.

3.【解答】$\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=1-1\times1\cos60°=\frac{1}{2}$，

故选 D.

4.【解答】∵a＞1，$\log_a x<\log_a y<0=\log_a 1$，

∴0＜x＜y＜1.

故选：C.

5.【解答】∵y=cosx 是偶函数，

∴命题 p 为真命题；

∵对于∀x∈R，都有 sinx≤1，

∴命题 q 为假命题，

∴¬p 为假命题，

∴¬p∨q 是假命题

故选：D.

6.【解答】将函数 y=sin2x 的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$个单位后，

所得图象对应的函数解析式为 $y=\sin 2(x-\frac{\pi}{8})=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$，

令 $2x-\frac{\pi}{4}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in z$，求得 $x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$，

∴$y=\sin(2x-\frac{\pi}{4})$ 的对称轴方程为：$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{3\pi}{8}$，$k\in z$.

当 $k=-1$ 时，$x=-\frac{\pi}{8}$，

故选：B.

7.【解答】由题意得，函数 $f(-x)=e^{-x}*e^{x}=\begin{cases}e^{x}, & x\geqslant 0\\ e^{-x}, & x<0\end{cases}$

∴$f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\leqslant 0\\ e^{x}, & x>0\end{cases}$

对于①，∵$f(0)=e^{0}=1$，∴$f(x)$ 的最小值是 1，∴①错误；

对于②，∵$f(-x)=e^{-x}*e^{x}=e^{x}*e^{-x}=f(x)$，∴$f(x)$ 为偶函数，∴②正确；

对于③，当 $x>0$ 时，$f(x)=e^{x}$ 是增函数，∴③正确；

对于④，构造函数 $g(x)=e^{x}-ex$，其中 $x>0$，当 $x=1$ 时，$g(x)=0$，∴函数 $g(x)$ 有零点，

∴函数 $f(x)$ 与 $y=ex$ 有公共点，∴④错误.

所以，正确的结论有②③.

故选：B.

8.【解答】设 $C(x,y)$，点 C 到 AB 的距离为 d，则直线 AB 的方程为 $x+y-1=0$，$|AB|=\sqrt{2}$

∵△ABC 的面积大于$\frac{3}{2}$，$S=\frac{1}{2}|AB|d$，

∴$d>\frac{3}{\sqrt{2}}$，

∴$\frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}>\frac{3}{\sqrt{2}}$，

∴$|x+y-1|>3$，

∴$\frac{y^{2}}{2}+y-1>3$ 或$\frac{y^{2}}{2}+y-1<-3$，

∴$y<-4$ 或 $y>2$.

故选：C.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】由题意知样本容量为 32，男生抽取 12 人，女生抽取 20 人，

男女比例为 12：20=3：5，

∴高三年级共有女生数为 $400\times\frac{5}{8}$=250 人．

故答案为：250．

10．【解答】圆 $x^2+y^2-4y=0$ 即 $x^2+(y-2)^2=4$，它的圆心为（0，2），半径为 r=2．

∵圆心到直线 $x+\sqrt{3}y=0$ 的距离为 $d=\frac{|0+2\sqrt{3}|}{\sqrt{1+3}}=\sqrt{3}$，

∴弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2$，

故答案为：2．

11．【解答】由三棱锥的三视图知：底面等腰直角三角形斜边上的高为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴侧视图的宽为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

设棱锥的高为 H，则$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times H=\frac{1}{6}$，

∴棱锥的高 H=1，

∴侧视图的高为 1，又侧视图为直角三角形，

∴侧视图的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times 1=\frac{\sqrt{2}}{4}$．

故答案为：$\frac{\sqrt{2}}{4}$．

12．【解答】不等式组$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1\\0\leqslant y\leqslant 1\end{cases}$表示的平面区域为 D 的面积为 1，

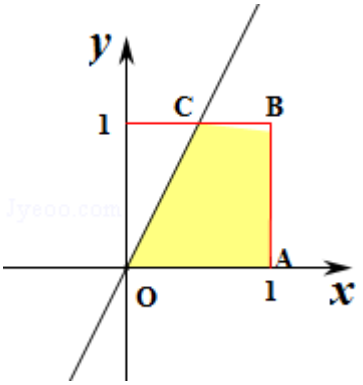
不等式 y＜2x 对应的区域为梯形 OABC，

当 y=1 时，$x=\frac{1}{2}$，即 C（$\frac{1}{2}$，0），

则梯形 OABC 的面积 $S=\frac{(\frac{1}{2}+1)\times 1}{2}=\frac{3}{4}$，

则在区域 D 内任取一点 P（x_0，y_0），则点 P 满足 $y_0<2x_0$ 的概率为$\frac{\frac{3}{4}}{1}=\frac{3}{4}$，

故答案为：$\frac{3}{4}$．



13.【解答】建成 x 层楼房，每平方米的购地费用为 8000000÷1000n=$\frac{8000}{n}$（元），

∵第一层建筑成本为 600 元，每升高一层，每平方米的建筑费用增加 40 元，

∴每平方米的建筑费用为 600+$\frac{40+40\times2+\cdots+40(n-1)}{n}$=20n+580（元），

所以每平方米的平均综合费用为：

y=20n+580+$\frac{8000}{n}$≥2$\sqrt{20n\times\frac{8000}{n}}$+580=2×400+580=1380（元），

当且仅当 20n=$\frac{8000}{n}$，即 n=10 时，该楼房每平方米的平均综合费用最低.

故答案为：20.

14.【解答】（1）当 n=4 时，P_4={1，2，3，4}，

符合条件的集合 A 为：{2}，{1，4}，{2，3}，{1，3，4}，

故答案为：{2}或{1，4}或{2，3}或{1，3，4}；

（2）任取偶数 x∈p_n，将 x 除以 2，若商仍为偶数，再除以 2…，经过 k 次后，商必为奇数，此时记商为 m，

于是 x=m•2^k，其中 m 为奇数，k∈N^*

由条件可知，若 m∈A，则 x∈A⇔k 为偶数；

若 m∉A，则 x∈A⇔k 为奇数；

于是 x 是否属于 A 由 m 是否属于 A 确定，设 Q_n 是 P_n 中所有的奇数的集合，

因此 f（n）等于 Q_n 的子集个数，当 n 为偶数时（或奇数时），P_n 中奇数的个数是$\frac{1}{2}$n（或$\frac{n+1}{2}$），

∴f（n）=$\begin{cases}2^{\frac{n}{2}}, & n\text{为偶数}\\ 2^{\frac{n+1}{2}}, & n\text{为奇数}\end{cases}$，

故当 N=9 时，f（9）=2^5=32，

故答案为：32.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.【解答】（Ⅰ）∵△ABC 中，$\cos 2C=1-2\sin^2 C=-\frac{1}{9}$，C 为锐角，

∴$\sin^2 C=\frac{5}{9}$，

则 $\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$；

（Ⅱ）∵$a=2$，$S_{\triangle ABC}=\sqrt{5}$，

∴$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}b=\sqrt{5}$，即 $b=3$，

∵$\sin C=\frac{\sqrt{5}}{3}$，∴$\cos C=\sqrt{1-\sin^2 C}=\frac{2}{3}$，

由余弦定理得：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C=4+9-12\times\frac{2}{3}=5$，

则 $c=\sqrt{5}$.

16.【解答】（Ⅰ）由 a_1，$3a_3$，a_2 成等差数列知 $6a_3=a_1+a_2$，

即 $6a_1q^2=a_1+a_1q$，

所以 $6q^2-q-1=0$，

因为 $q<0$，

所以 $q=-\frac{1}{3}$；

（Ⅱ）$S_n=2n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(-\frac{1}{3})=\frac{-n^2+13n}{6}$，

所以 $-n^2+13n>0$，解得 $0<n<13$，

所以满足条件的最大值为 $n=12$.

17.【解答】（Ⅰ）证明：∵长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB$，

E，F 分别是 AA_1，DD_1 的中点，

∴$B_1C_1\parallel A_1D_1$，$EF\parallel A_1D_1$，

∴$B_1C_1\parallel EF$，

∵B_1C_1 不包含于平面 EFC，$EF\subset$平面 EFC，

∴$B_1C_1\parallel$平面 EFC.

（Ⅱ）证明：设 $AB=1$，则 $AA_1=2AB=2$，$D_1F=DF=1$，

∴$C_1F=CF=\sqrt{2}$，∴$C_1F^2+CF^2=CC_1^2$，

∴$C_1F\perp CF$，∵$A_1D_1\perp$平面 CDD_1C_1，$EF\parallel A_1D_1$，

∴$EF\perp$平面 CDD_1C_1，

∵C_1F⊂平面 CDD_1C_1，∴C_1F⊥EF，

∴C_1F⊥平面 EFC.

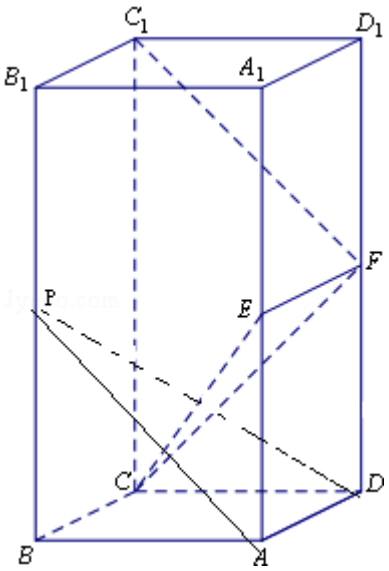
（Ⅲ）解：棱 BB_1 上存在中点 P，使得平面 ADP⊥平面 EFC.

证明如下：∵长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，F 是 DD_1 中点，P 是 BB_1 中点，

∴C_1F∥AP，∵C_1F⊥平面 EFC，∴AP⊥平面 EFC，

∵AP⊂平面 ADP，∴平面 ADP⊥平面 EFC，

此时$\frac{BP}{BB_1}=\frac{1}{2}$.



18.【解答】（Ⅰ）∵f（x）=lnx+$\frac{2a}{x}$，

∴f′（x）=$\frac{1}{x}-\frac{2a}{x^2}$，

∵函数 f（x）在 x=1 处取得极值，

∴f′（1）=0，

∴1－2a=0，

∴a=$\frac{1}{2}$；

（Ⅱ）∵函数 f（x）的图象上的点都在直线 y=2 的上方，

∴lnx+$\frac{2a}{x}$≥2 在（0，+∞）上恒成立，

∴2a≥2x－xlnx，

令 y=2x－xlnx，则 y′=2－lnx－1=1－lnx，

∴函数在（0，e）上单调递增，在（e，+∞）上单调递减，

∴x=e 时，函数取得最大值 2e－elne=e，

∴2a≥e，

∴$a \geqslant \frac{e}{2}$.

19.【解答】（Ⅰ）∵椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的两个焦点分别为 F_1（－1，0），F_2（1，0），

短轴的一个端点为 M，△MF_1F_2 为等边三角形，

∴c=1，a=2c=2，∴$b^2=4-1=3$，

∴椭圆 C 的标准方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

（Ⅱ）在直线 y=－$\frac{1}{2}$上不存在点 N，使得四边形 OANB 为矩形.

理由如下：

∵过点（0，－2）的直线 l 与椭圆 C 相交于 A，B 两点，

∴当 l 的斜率不存在时，l 的方程为 x=0，A（0，$\sqrt{3}$），B（0，$-\sqrt{3}$），

在直线 y=－$\frac{1}{2}$上不存在点 N，使得四边形 OANB 为矩形.

当直线 l 的斜率为 0 时，l 的方程为 y=－2，不成立，

∴设直线 l 的方程为 y=kx－2，k≠0，

联立$\begin{cases} y=kx-2 \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，得（$3+4k^2$）$x^2-16kx+4=0$，

△=（－16k）$^2-16(3+4k^2)>0$，解得 $k^2>\frac{1}{4}$，

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

$x_1+x_2=\frac{16k}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4}{3+4k^2}$，

$y_1y_2=(kx_1-2)(kx_2-2)=k^2x_1x_2-2k(x_1+x_2)+4$，

∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=(k^2+1)\cdot\frac{4}{3+4k^2}-2k\cdot\frac{16k}{3+4k^2}+4=\frac{4-24k^2}{3+4k^2}$，

∵$k^2>\frac{1}{4}$，∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\neq 0$，

∴直线 y=－$\frac{1}{2}$上是不存在点 N，使得四边形 OANB 为矩形.

20.【解答】（Ⅰ）∵对任意 x∈R^+，a∈R 都有 f（x^a）=af（x），

令 x=2，则 f（2^a）=af（2），

∵f（2）=1，∴f（2^a）=a，

∴f（$\sqrt{2}$）=f（$2^{\frac{1}{2}}$）=$\frac{1}{2}$；

（Ⅱ）证明：∵对任意 x∈R^+，a∈R 都有 f（x^a）=af（x），

∴令 x=1 则 f（1）=af（1），若 a=1，则恒成立，

若 a≠1，则 f（1）=0，

∴f（x）=0 有一个根为 1，

如果还有一个根设为 m，m＞0 且 m≠1，那么

f（m）=0，f（m^a）=af（m），

即有 f（m^a）=0，

由于 a 为任意实数，m＞0 且 m≠1，则由指数函数的值域得，m^a＞0，

这与①f（x）不恒为零矛盾，所以 f（m）=0 不成立，

故方程 f（x）=0 有且只有一个实数根；

（Ⅲ）证明：由|f（m）|=|f（n）|推出 f（m）=f（n）或 f（m）=-f（n），

∵f（x）在（0，+∞）上单调递增，∴f（m）=f（n）推出 m=n，这与 m＞n＞0 矛盾，

∴f（m）=-f（n），

∵f（x^a）=af（x），∴f（m）=f（n^{-1}），

∴m=n^{-1}，即 n=$\frac{1}{m}$，

由于 m＞n＞0，所以 m＞1，f（m）＞f（1）=0，

∵$\frac{m+n}{2}>\sqrt{mn}$=1，∴f（$\frac{m+n}{2}$）＞0，

又|f（m）|=2|f（$\frac{m+n}{2}$）|，

∴f（m）=2f（$\frac{m+n}{2}$）=f（$\frac{m^2+n^2+2mn}{4}$），

即有 m=$\frac{m^2+n^2+2mn}{4}$，即 $m^2+m^{-2}-2=4(m-1)$，

∴（m-$\frac{1}{m}$）^{2}=4（m-1），即$\frac{(m-1)(m+1)^2}{m^2}$=4

即 $m^3-3m^2-m-1=0$，令 f（m）=m^3-3m^2-m-1，

由于 f（3）=27-27-3-1＜0，f（2+$\sqrt{2}$）=（6+4$\sqrt{2}$）（$\sqrt{2}$-1）-3-$\sqrt{2}$=$\sqrt{2}$-1＞0，

由零点存在定理得，3＜m＜2+$\sqrt{2}$.