2014 北京丰台高三二模

数　　学（理）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.（5 分）若复数（m－1）+（m－2）i（m∈R）是纯虚数，则实数 m 等于（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．1 或 2

2.（5 分）已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_3+a_9=4$，那么数列$\{a_n\}$的前 11 项和等于（　　）

A．22　　B．24　　C．44　　D．48

3.（5 分）直线 l_1：$x+y-2\sqrt{2}=0$ 与直线 l_2：$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（t 为参数）的交点到原点 O 的距离是（　　）

A．1　　B．$\sqrt{2}$　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

4.（5 分）将函数 f（x）=$\log_2$（2x）的图象向左平移 1 个单位长度，那么所得图象的函数解析式为（　　）

A．y=$\log_2$（2x+1）　　B．y=$\log_2$（2x－1）　C．y=$\log_2$（x+1）+1　D．y=$\log_2$（x－1）+1

5.（5 分）已知 y=sin（π+x）－cos2x，则 y 的最小值和最大值分别为（　　）

A．$-\frac{9}{8}$，2　B．－2，$\frac{9}{8}$　C．$-\frac{3}{4}$，2　D．－2，$\frac{3}{4}$

6.（5 分）设 m、n 是两条不同的直线，α、β 是两个不同的平面．考察下列命题，其中真命题是（　　）

A．m⊥α，n⊂β，m⊥n⇒α⊥β　　B．α⊥β，α∩β=m，m⊥n⇒n⊥β

C．α⊥β，m⊥α，n∥β⇒m⊥n　　D．α∥β，m⊥α，n∥β⇒m⊥n

7.（5 分）过抛物线 $y^2=2px$（p＞0）的焦点 F 且倾斜角为 60° 的直线 l 与抛物线在第一、四象限分别交于 A、B 两点，则$\frac{|AF|}{|BF|}$的值等于（　　）

A．5　　B．4　　C．3　　D．2

8.（5 分）定义在 R 上的函数 f（x）和 g（x）的导函数分别为 f′（x），g′（x），则下面结论正确的是（　　）

①若 f′（x）＞g′（x），则函数 f（x）的图象在函数 g（x）的图象上方；

②若函数 f′（x）与 g′（x）的图象关于直线 x=a 对称，则函数 f（x）与 g（x）的图象关于点（a，0）对称；

③函数 f（x）=f（a－x），则 f′（x）=－f′（a－x）；

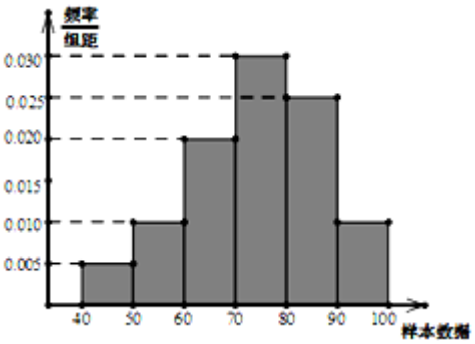
④若 f′（x）是增函数，则 f（$\frac{x_1+x_2}{2}$）≤$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$．

A．①②　B．①②③　　C．③④　D．②③④

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9.（5 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=3^n-1$，则它的通项公式为 a_n=_____．

10.（5 分）已知一个样本容量为 100 的样本数据的频率分布直方图如图所示，样本数据落在[40，60）内的频数为_____．



11.（5 分）已知圆 C：$(x+1)^2+(y-3)^2=9$ 上的两点 P，Q 关于直线 $x+my+4=0$ 对称，那么 m=_____.

12.（5 分）将 6 位志愿者分配到甲、已、丙 3 个志愿者工作站，每个工作站 2 人，由于志愿者特长不同，A 不能去甲工作站，B 只能去丙工作站，则不同的分配方法共有_____种.

13.（5 分）已知向量 $\vec{a}=(1,-2)$，M 是平面区域 $\begin{cases} x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \\ x-y+1\geqslant 0 \\ 2x+y-4\leqslant 0 \end{cases}$ 内的动点，O 是坐标原点，则 $\vec{a}\cdot\overrightarrow{OM}$ 的最小值是_____.

14.（5 分）已知数列 $\{a_n\}$ 的项是由 1 或 2 构成，且首项为 1，在第 k 个 1 和第 k+1 个 1 之间有 2k－1 个 2，即数列 $\{a_n\}$ 为 1，2，1，2，2，2，1，2，2，2，2，2，1，…记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 S_{20}=_____；S_{2014}=_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（13 分）已知△ABC 中，∠A，∠B，∠C 的对边长分别为 a，b，c，且 $a^2+b^2=ab+3$，C=60°．

（Ⅰ）求 c 的值；

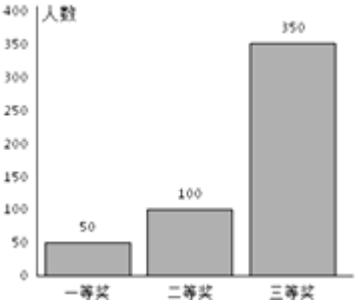
（Ⅱ）求 a+b 的取值范围.

16.（13 分）某超市进行促销活动，规定消费者消费每满 100 元可抽奖一次．抽奖规则：从装有三种只有颜色不同的球的袋中随机摸出一球，记下颜色后放回，依颜色分为一、二、三等奖，一等奖奖金 15 元，二等奖奖金 10 元，三等奖奖金 5 元．活动以来，中奖结果统计如图所示．消费者甲购买了 238 元的商品，准备参加抽奖．以频率作为概率，解答下列各题.

（Ⅰ）求甲恰有一次获得一等奖的概率；

（Ⅱ）求甲获得 20 元奖金的概率；

（Ⅲ）记甲获得奖金金额为 X，求 X 的分布列及期望 EX.



17.（14 分）如图 1，在直角梯形 ABCD 中，AD∥BC，AD=AB=$\sqrt{2}$，∠BAD=90°，∠BCD=45°，E 为对角线 BD 的中点．现将△ABD 沿 BD 折起到△PBD 的位置，使平面 PBD⊥平面 BCD，如图 2.

（Ⅰ）求证直线 PE⊥平面 BCD；

（Ⅱ）求异面直线 BD 和 PC 所成角的余弦值；

（Ⅲ）已知空间存在一点 Q 到点 P，B，C，D 的距离相等，写出这个距离的值（不用说明理由）.

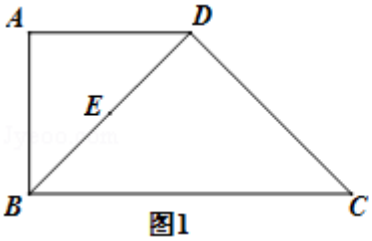


图1

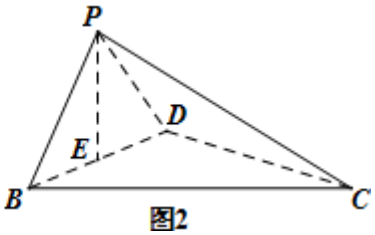


图2

18.（13 分）已知函数 f（x）=xe^x - a（$\frac{1}{2}x^2+x$）（e=2.718..）.

（Ⅰ）当 a=1 时，求函数 f（x）的极值；

（Ⅱ）求函数在区间[- 1，1]上的最小值.

19.（13 分）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 与直线 l：y=kx+m 交于 A，B 两点，O 为坐标原点.

（Ⅰ）若直线 l 经过椭圆 E 的左焦点，且 k=1，求△AOB 的面积；

（Ⅱ）若 OA⊥OB，且直线 l 与圆 O：$x^2+y^2=r^2$ 相切，求圆 O 的半径 r 的值.

20.（14 分）已知函数 f（x）的定义域为 D，若它的值域是 D 的子集，则称 f（x）在 D 上封闭.

（Ⅰ）试判断 f（x）=2^x，g（x）=$\log_2 x$ 是否在（1，+∞）上封闭；

（Ⅱ）设 f_1（x）=f（x），f_n（x）=f（f_{n-1}（x））（n∈N^*，n≥2），若 f_n（x）（n∈N^*）的定义域均为 D，求证：f_n（x）在 D 上封闭的充分必要条件是 f_1（x）在 D 上封闭；

（Ⅲ）若 a＞0，求证：h（x）=$\frac{\sqrt{2}}{2}$（|xsinx|+|xcosx|）在[0，a]上封闭，并指出值域为[0，a]时 a 的值.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】∵复数（m﹣1）+（m﹣2）i（m∈R）是纯虚数，

∴$\begin{cases} m-1=0 \\ m-2\neq 0 \end{cases}$，解得 m=1.

故选：B.

2.【解答】∵数列$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_3+a_9=4$，

∴$a_3+a_9=a_1+a_{11}=4$，

则数列$\{a_n\}$的前 11 项和为$S_{11}=\frac{a_1+a_{11}}{2}\times 11=\frac{4\times 11}{2}=22$，

故选：A.

3.【解答】∵直线 l_1：$x+y-2\sqrt{2}=0$，

直线 l_2：$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$（t 为参数），

∴$\frac{\sqrt{2}}{2}t+\frac{\sqrt{2}}{2}t-2\sqrt{2}=0$；

解得 t=2，

∴两直线的交点是（$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$）；

交点到原点 0 的距离 d=$\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$.

故选：C.

4.【解答】将函数 f（x）=$\log_2$（2x）的图象向左平移 1 个单位长度，

得到的图象对应的函数解析式为：$y=\log_2[2(x+1)]$.

∵$\log_2[2(x+1)]=\log_{2^2}+\log_2(x+1)=\log_2(x+1)+1$，

∴$y=\log_2(x+1)+1$.

故答案为：C

5.【解答】∵$y=\sin(\pi+x)-\cos 2x=-\sin x-(1-2\sin^2 x)=2\sin^2 x-\sin x-1=2(\sin x-\frac{1}{4})^2-\frac{9}{8}$，

故当 $\sin x=\frac{1}{4}$时，函数取得最小值为 $-\frac{9}{8}$，当 $\sin x=-1$ 时，函数取得最大值为 2，

故选：A.

6.【解答】A：m⊥α，n⊂β，m⊥n时，α、β 可能平行，也可能相交，不一定垂直，故A不正确

B：当 α⊥β，α∩β=m时，若n⊥m，n⊂α，则n⊥β，但题目中无条件n⊂α，故B也不一定成立，

C：α⊥β，m⊥α，n∥β 时，m与n可能平行、相交或异面，不一定垂直，故C错误

D：α∥β，m⊥α，n∥β 时，m与n一定垂直，故D正确

故选D.

7.【解答】设A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{2p}{\sin^2\theta}=\frac{8p}{3}$，$x_1+x_2=\frac{5p}{3}$，

又$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，可得$x_1=\frac{3}{2}p$，$x_2=\frac{p}{6}$，

则$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{\frac{3p}{2}+\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}+\frac{p}{6}}=3$，

故选C.

8.【解答】①由f′（x）＞g′（x），说明函数f（x）比g（x）增加的快，而函数f（x）的图象不一定在函数g（x）的图象上方，因此不正确；

②由函数f′（x）与g′（x）的图象关于直线x=a对称，可得f′（x）=﹣g′（2a﹣x）.

假设函数f（x）与g（x）的图象关于点（a，0）不对称，则g（2a﹣x）≠f（x），

∴g′（2a﹣x）≠﹣f′（x），

这与f′（x）=g′（2a﹣x）相矛盾，因此假设不成立.

∴函数f（x）与g（x）的图象关于点（a，0）对称，正确.

③函数f（x）=f（a﹣x），由复合函数的导数运算法则可得：f′（x）=﹣f′（a﹣x），故正确；

④由f′（x）是增函数，可得f（$\frac{x_1+x_2}{2}$）≤$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$正确.

综上可知：②③④正确.

故选：D.

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9.【解答】∵数列{a_n}的前n项和为$S_n=3^n-1$，∴$s_1=2$，

$3^n-1-(3^{n-1}-1)=2\times3^{n-1}$，且n=1是也满足$a_n=2\times3^{n-1}$

∴数列{a_n}的通项公式为$a_n=2\times3^{n-1}$

故答案为 $2\times3^{n-1}$

10.【解答】样本数据落在[40，60）内的频率为：（0.005+0.010）×10=0.15，

∴样本数据落在[40，60）内的频数为 0.15×100=15.

故答案为：15.

11.【解答】由题意可得，圆心（－1，3）在直线 x+my+4=0 上，

∴－1+3m+4=0，解得 m=－1，

故答案为：－1.

12.【解答】根据 A 不能去甲工作站，B 只能去丙工作站，所以甲站只能从余下的 4 人中任选 2 人，有C_4^2种，每个工作站 2 人，所以丙站只能从余下的 3 人中，任选 1 人有C_3^1，余下的两人到乙站，不同的分配方法共有$C_4^2\cdot C_3^1$=18 种.

故答案为 18.

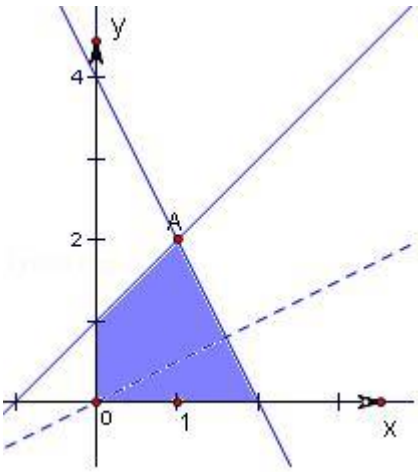
13.【解答】如图所示：

设 M（x，y），则$\vec{a}\cdot\overrightarrow{OM}$=x－2y，设 z=x－2y，即 y=$\frac{1}{2}$x－$\frac{1}{2}$z，

首先做出直线 l_0：y=$\frac{1}{2}$x－$\frac{1}{2}$z，将 l_0平行移动，当经过 A（1，2）点时在 y 轴上的截距最大，从而 z 最小，

∴z 的最小值为 z=1－4=－3.

故答案为：－3.



14.【解答】设 f（k）=2k－1，则数列为 1，2，1，2，2，2，1，2，2，2，2，2，1…

∴前 20 项中共有 16 个 2，4 个 1

S_{20}=1×4+2×16=36.

记第 k 个 1 与其后面的 k 个 2 组成第 k 组，其组内元素个数记为 b_k，则 b_k=2k

$b_1+b_2+\cdots+b_n$=2+4+…+2n=n（n+1）＜2014，

而 46×45=1910＜2011，47×46=2162＞2014

故 n=45 即前 2014 项中有 45 个 1 以及 1969 个 2，所以 S_{2014}=45+1969×2=3983.

故答案为：36，3983.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.【解答】（Ⅰ）△ABC 中，∵a^2+b^2=ab+3，C=60°，∴$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C=a^2+b^2-ab=3$，∴c=$\sqrt{3}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 $c^2=a^2+b^2-ab=3=(a+b)^2-3ab\geqslant(a+b)^2-3\times\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$，∴$(a+b)^2\leqslant12$，a+b≤2$\sqrt{3}$，当且仅当 a=b 时，取等号.

再由三角形任意两边之和大于第三边可得 a+b＞c=$\sqrt{3}$，

故要求的 a+b 的范围为（$\sqrt{3}$，2$\sqrt{3}$].

16.【解答】（Ⅰ）由题意，一等奖的概率为$\frac{50}{500}$=0.1，二等奖的概率为$\frac{100}{500}$=0.2，三等奖的概率为$\frac{350}{500}$=0.7，

∴甲恰有一次获得一等奖的概率为C_2^1×0.1×（0.2+0.7）=0.18；

（Ⅱ）甲获得 20 元奖金的概率为 0.2×0.2+C_2^1×0.1×0.7=0.18；

（Ⅲ）X=30，25，20，15，10，则

P（X=30）=0.1×0.1=0.01，P（X=25）=C_2^1×0.1×0.2=0.04，P（X=20）=0.18，

P（X=15）=C_2^1×0.2×0.7=0.28，P（X=10）=0.7×0.7=0.49

X 的分布列

X	30	25	20	15	10
P	0.01	0.04	0.18	0.28	0.49

EX=30×0.01+25×0.04+20×0.18+15×0.28+10×0.49=14.

17.【解答】（Ⅰ）证明：∵E 为 BD 的中点，PB=PD，

∴PE⊥BD，

∵平面 PBD⊥平面 BCD，且平面 PBD∩平面 BCD=BD，

PE⊂平面 PBD，

∴直线 PE⊥平面 BCD.

（Ⅱ）解：如图所示，建立空间直角坐标系，

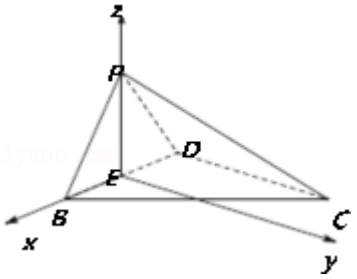
依题意得 E（0，0，0），B（1，0，0），C（－1，2，0），D（－1，0，0），P（0，0，1），

∴$\overrightarrow{BD}$=（－2，0，0），$\overrightarrow{PC}$=（－1，2，－1），

∴cos＜$\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{PC}$＞=$\frac{2}{2\sqrt{6}}$=$\frac{\sqrt{6}}{6}$，

∴异面直线 BD 和 PC 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$

（Ⅲ）空间存在一点 Q 到点 P，B，C，D 的距离相等，这个距离的值为$\sqrt{2}$.



18.【解答】（I）当 a=1 时，f（x）=xe^x－（$\frac{1}{2}x^2$+x），f′（x）=e^x+xe^x－x－1=（x+1）（e^x－1），

令 f′（x）=0，解得 x=－1 或 x=0．令 f′（x）＞0，解得 x＞0 或 x＜－1，此时函数 f（x）单调递增；令 f′（x）＜0，解得－1＜x＜0，此时函数 f（x）单调递减法．

∴当 x=－1 时，函数 f（x）取得极大值，f（－1）=$\frac{1}{2}-\frac{1}{e}$；当 x=0 时，函数 f（x）取得极小值，f（0）=0．

（II）f′（x）=e^x+xe^x－a（x+1）=（x+1）（e^x－a）．

①当 a≤$\frac{1}{e}$时，e^x－a＞0，由 x≥－1，可得 f′（x）≥0，此时函数 f（x）单调递增．

∴当 x=－1 时，函数 f（x）取得最小值，f（－1）=－$\frac{1}{e}+\frac{1}{2}$a．

②当 a≥e 时，e^x－a≤0，由 x≥－1，可得 f′（x）≤0，此时函数 f（x）单调递减．

∴当 x=1 时，函数 f（x）取得最小值，f（1）=e－$\frac{3}{2}$a．

②当 e＞a＞$\frac{1}{e}$时，由 e^x－a=0，解得 x=lna．

当－1≤x＜lna 时，f′（x）＜0，此时函数 f（x）单调递减；当 lna＜x≤1 时，f′（x）＞0，此时函数 f（x）单调递增．

∴当 x=lna 时，函数 f（x）取得极小值即最小值，f（lna）=$-\frac{a}{2}\ln^2 a$．

19.【解答】（Ⅰ）椭圆 E 的左焦点为（－2，0），k=1，代入 y=kx+m，可得 m=2

∴直线 l：y=x+2

代入椭圆 E：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，整理可得 $3x^2+8x=0$，

∴x=0 或 $x=-\frac{8}{3}$，

∴y=2 或 $y=-\frac{2}{3}$，

∴△AOB 的面积 $S=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(2+\frac{2}{3})=\frac{8}{3}$；

（Ⅱ）设 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$.

直线 l：y=kx+m，代入椭圆 E：$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$，消去 y 得到 $(1+2k^2)x^2+4kmx+2m^2-8=0$.

∴$x_1+x_2=-\frac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-8}{1+2k^2}$（*）

∵OA⊥OB，

∴$x_1x_2+y_1y_2=0$.

又 $y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)$，

∴$(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=0$.

把（*）代入可得 $3m^2=8(1+k^2)$，

∵直线 l 与圆 O：$x^2+y^2=r^2$ 相切，

∴∴点 O 到直线 l 的距离 $d=r=\frac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

20.【解答】（Ⅰ）当 x＞1 时，$f(x)=2^x\in(2, +\infty)$，f（x）在（1，+∞）上封闭，

$g(x)=\log_2 x\in(0, +\infty)$，g（x）在（1，+∞）上不封闭；

（Ⅱ）证明：设 $f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))(n\in N^*, n\geq 2)$，

先证：$f_n(x)$ 在 D 上封闭的充分条件是 $f_1(x)$ 在 D 上封闭，

任取 x∈D，∵$f_1(x)$ 在 D 上封闭，∴$f_2(x)=f(f_1(x))\in D$，…，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x)))\in D$，

∴$f_n(x)$ 在 D 上封闭的充分条件是 $f_1(x)$ 在 D 上封闭；

再证：$f_n(x)$ 在 D 上封闭的必要条件是 $f_1(x)$ 在 D 上封闭.

考虑运用反证法，假设 $f_1(x)$ 在 D 上不封闭，即存在 $x_0\in D$，使得 $f(x_0)\notin D$，

那么 $f_2(x_0)=f(f_1(x_0))$ 无意义，这与 $f_n(x)(n\in N^*)$ 的定义域均为 D 矛盾，故假设不成立，

即 $f_1(x)$ 在 D 上封闭是 $f_n(x)$ 在 D 上封闭的必要条件.

故 $f_n(x)$ 在 D 上封闭的充分必要条件是 $f_1(x)$ 在 D 上封闭；

（Ⅲ）证明：∵a＞0，0≤x≤a，

∴$h(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}(|x\sin x|+|x\cos x|)=\frac{\sqrt{2}}{2}x(|\sin x|+|\cos x|)$，

∵|sinx|+|cosx|=$\sqrt{sin^2x+cos^2x+|sin2x|}$=$\sqrt{1+|sin2x|}$∈[1，$\sqrt{2}$]，

∴0≤h（x）≤$\frac{\sqrt{2}}{2}$•a•$\sqrt{2}$=a，

∴h（x）在[0，a]上封闭；

若值域为[0，a]，由上面可知，|sinx|+|cosx|=$\sqrt{2}$，

则h（x）≤$\frac{\sqrt{2}}{2}$•x•$\sqrt{2}$=x≤a，

即|sina|+|cosa|=$\sqrt{2}$，

∴a=$\frac{\pi}{4}$+kπ（k∈N）.