2014 北京丰台高三二模

数　　学（文）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.（5 分）sin600° 的值是（　　）

A. $\frac{1}{2}$　B. $-\frac{1}{2}$　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

2.（5 分）已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且 $a_3+a_9=4$，那么数列$\{a_n\}$的前 11 项和等于（　　）

A. 22　B. 24　C. 44　D. 48

3.（5 分）将函数 f（x）=sinx 图象所有的点向右移动$\frac{\pi}{3}$个单位长度，再将所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），所得图象的函数解析式为（　　）

A. $y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3})$　B. $y=\sin(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{6})$　C. $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$　D. $y=\sin(2x-\frac{\pi}{6})$

4.（5 分）已知 $a=0.3^{-0.2}$，$b=\log_{0.5}0.8$，$c=\log_{0.5}3$，那么 a，b，c 的大小关系是（　　）

A. a＜b＜c　B. c＜b＜a　C. c＜a＜b　D. a＜c＜b

5.（5 分）圆 C：$(x+1)^2+(y-3)^2=9$ 上有两点 P，Q 关于直线 x+my+4=0 对称，则 m 等于（　　）

A. $-\frac{5}{3}$　B. $\frac{5}{3}$　C. －1　D. 1

6.（5 分）已知实数 a≠0，函数$f(x)=\begin{cases}x^2+2a, & x<1\\ -x, & x\geqslant 1\end{cases}$，若 f（1－a）≥f（1+a），则实数 a 的取值范围是（　　）

A.（0，+∞）　B.（－∞，0）　C.［－2，－1］　D.［－2，－1］∪（0，+∞）

7.（5 分）设 m、n 是两条不同的直线，α、β 是两个不同的平面．考察下列命题，其中真命题是（　　）

A. m⊥α，n⊂β，m⊥n⇒α⊥β　B. α⊥β，α∩β=m，m⊥n⇒n⊥β

C. α⊥β，m⊥α，n∥β⇒m⊥n　D. α∥β，m⊥α，n∥β⇒m⊥n

8.（5 分）设函数 f（x）的定义域为 D，如果∀x∈D，∃y∈D，使得 f（x）=－f（y）成立，则称函数 f（x）为“Ω 函数”．给出下列四个函数：

①y=sinx；

②$y=2^x$；

③$y=\frac{1}{x-1}$；

④f（x）=lnx，

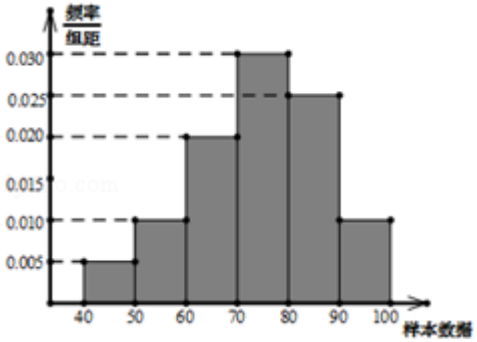
则其中“Ω 函数”共有（　　）

A. 1 个　B. 2 个　C. 3 个　D. 4 个

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9.（5 分）已知一个样本容量为 100 的样本数据的频率分布直方图如图所示，样本数据落在[40，60）内的频数

为_____.



10.（5 分）已知数列{a_n}的前 n 项和为 $S_n=3^n-1$，则它的通项公式为 a_n=_____.

11.（5 分）已知变量 x，y 满足约束条件$\begin{cases}x+2y\geqslant 1\\ x-y\leqslant 1\\ y-1\leqslant 0\end{cases}$，则 z=x－2y 的最大值为_____.

12.（5 分）已知$\vec{a}$，$\vec{b}$均为单位向量，若（2$\vec{a}$+$\vec{b}$）•（2$\vec{b}$－$\vec{a}$）=$\frac{3}{2}$，那么向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为_____.

13.（5 分）已知 A_1，A_2双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞0，b＞0）的顶点，B 为双曲线 C 的虚轴一个端点．若△A_1BA_2是等边三角形，则双曲线 C 的离心率 e 等于_____.

14.（5 分）已知函数 f（x）由下表定义：

x	1	2	3	4	5
f（x）	4	1	3	5	2

若 $a_1=5$，$a_{n+1}=f(a_n)$（n=1，2，…），则 a_{2014}=_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（13 分）已知△ABC 中，∠A，∠B，∠C 的对边长分别为 a，b，c，且 $a^2+b^2=ab+3$，C=60°．

（Ⅰ）求 c 的值；

（Ⅱ）求 a+b 的取值范围．

16.（13 分）某超市为了促销，举行消费抽奖活动，消费者可从一个装有 1 个红球，2 个黄球，3 个白球的口袋中按规定不放回摸球，摸中红球获奖 15 元，黄球获奖 10 元，白球获奖 5 元，奖金进行累加．抽奖规则如下：消费金额每满 100 元可摸 1 个球，最多可摸 3 个球．消费者甲购买了 238 元的商品，准备参加抽奖．

（Ⅰ）求甲摸出的球中恰有一个是红球的概率；

（Ⅱ）求甲获得 20 元奖金的概率．

17.（14 分）如图 1，在直角梯形 ABCD 中，已知 AD∥BC，AD=AB=1，∠BAD=90°，∠BCD=45°，E 为对角线 BD 中点．现将△ABD 沿 BD 折起到△PBD 的位置，使平面 PBD⊥平面 BCD，如图 2．

（Ⅰ）求证直线 PE⊥平面 BCD；

（Ⅱ）求证平面 PBC⊥平面 PCD；

（Ⅲ）已知空间存在一点 Q 到点 P，B，C，D 的距离相等，写出这个距离的值（不用说明理由）.

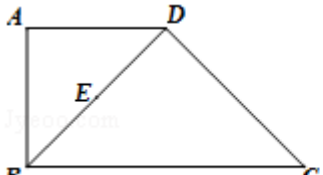


图1

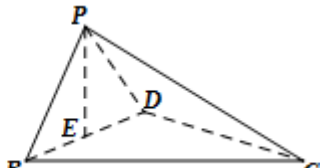


图2

18.（13 分）已知函数 f（x）=（1﹣a）lnx+$\frac{a}{x}$+x，其中 a∈R.

（Ⅰ）若曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线垂直于 y 轴，求 a 的值；

（Ⅱ）求函数 f（x）在区间[1，e]（e=2.718…）上的最小值.

19.（13 分）已知椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左右焦点分别为 F_1，F_2，离心率为为$\frac{\sqrt{2}}{2}$. 点 P 在椭圆 E 上，且△PF_1F_2的周长为 $4\sqrt{2}+4$.

（Ⅰ）求椭圆 E 的方程；

（Ⅱ）若直线 l：y=x+m 与椭圆 E 交于 A，B 两点，O 为坐标原点，求△AOB 面积的最大值.

20.（14 分）已知函数 f（x）的定义域为 D，若它的值域是 D 的子集，则称 f（x）在 D 上封闭.

（Ⅰ）试判断 f（x）=2^x，g（x）=$\log_2 x$ 是否在（1，+∞）上封闭；

（Ⅱ）设 f_1（x）=f（x），f_n（x）=f（f_{n-1}（x））（n∈N^*，n≥2），求证：f_n（x）在 D 上封闭的充分条件是 f_1（x）在 D 上封闭；

（Ⅲ）若（Ⅱ）中 f_n（x）（n∈N^*）的定义域均为 D，那么 f_1（x）在 D 上封闭是 f_n（x）在 D 上封闭的必要条件吗？证明你的结论.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】sin600°=sin（2×360°﹣120°）

=﹣sin120°=﹣sin（180°﹣60°）

=﹣sin60°=$-\frac{\sqrt{3}}{2}$.

故选 D

2.【解答】∵数列$\{a_n\}$是等差数列，且$a_3+a_9=4$，

∴$a_3+a_9=a_1+a_{11}=4$，

则数列$\{a_n\}$的前 11 项和为$S_{11}=\frac{a_1+a_{11}}{2}\times 11=\frac{4\times 11}{2}=22$，

故选：A.

3.【解答】∵f（x）=sinx，

∴f（$x-\frac{\pi}{3}$）=sin（$x-\frac{\pi}{3}$），再将所得各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$倍（纵坐标不变），

所得图象的函数解析式为：$y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，

故选：C.

4.【解答】∵$a=0.3^{-0.2}>0.3^0=1$，

$0=\log_{0.5}1<b=\log_{0.5}0.8<\log_{0.5}0.5=1$，

$c=\log_{0.5}3<\log_{0.5}1=0$，

∴a＞b＞c.

故选：C.

5.【解答】由题意可得圆心（﹣1，3）在直线 x+my+4=0 上，

故有﹣1+3m+4=0 m=﹣1，

故选：C.

6.【解答】∵数 a≠0，f（x）=$\begin{cases}x^2+2a, & x<1\\ -x, & x\geqslant 1\end{cases}$，

∴当 a＞0 时，f（1－a）≥f（1+a）⇔（1－a）^{2}+2a≥－（1+a）⇔a^2+a+2＞0⇔$(a+\frac{1}{2})^2+\frac{7}{4}$＞0，

显然成立，

∴a＞0 符合题意；

当 a＜0 时，f（1－a）≥f（1+a）⇔－（1－a）≥（1+a）^{2}+2a⇔a^2+3a+2≤0，

解得：－2≤a≤－1.

综上所述，实数 a 的取值范围是[－2，－1]∪（0，+∞）.

故选 D.

7.【解答】A：m⊥α，n⊂β，m⊥n 时，α、β 可能平行，也可能相交，不一定垂直，故 A 不正确

B：当 α⊥β，α∩β=m 时，若 n⊥m，n⊂α，则 n⊥β，但题目中无条件 n⊂α，故 B 也不一定成立，

C：α⊥β，m⊥α，n∥β 时，m 与 n 可能平行、相交或异面，不一定垂直，故 C 错误

D：α∥β，m⊥α，n∥β 时，m 与 n 一定垂直，故 D 正确

故选 D.

8.【解答】若∀x∈D，∃y∈D，使得 f（x）=－f（y）成立，

即等价为∀x∈D，∃y∈D，使得 f（x）+f（y）=0 成立.

A. 函数的定义域为 R，∵y=sinx 是奇函数，

∴f（－x）=－f（x），即 f（x）+f（－x）=0，∴当 y=－x 时，等式（x）+f（y）=0 成立，∴A 为“Ω 函数”.

B. ∵f（x）=2^x＞0，∴2^x+2^y＞0，则等式（x）+f（y）=0 不成立，∴B 不是“Ω 函数”.

C. 函数的定义域为{x|x≠1}，由（x）+f（y）=0 得$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{y-1}=0$，即$\frac{x+y-2}{(x-1)(y-1)}=0$，

∴x+y－2=0，即 y=2－x，当 x≠1 时，y≠1，∴当 y=2－x 时，等式（x）+f（y）=0 成立，∴C 为“Ω 函数”.

D. 函数的定义域为（0，+∞），由（x）+f（y）=0 得 lnx+lny=ln（xy）=0，即 xy=1，即当 y=$\frac{1}{x}$时，等式（x）+f（y）=0 成立，∴D 为“Ω 函数”.

综上满足条件的函数是 A，C，D，共 3 个，

故选：C

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】样本数据落在[40，60）内的频率为：（0.005+0.010）×10=0.15，

∴样本数据落在[40，60）内的频数为 0.15×100=15.

故答案为：15.

10.【解答】∵数列$\{a_n\}$的前 n 项和为$S_n=3^n-1$，∴$s_1=2$，

$3^n-1-(3^{n-1}-1)=2\times3^{n-1}$，且 n=1 是也满足$a_n=2\times3^{n-1}$

∴数列$\{a_n\}$ 的通项公式为$a_n=2\times3^{n-1}$

故答案为$2\times3^{n-1}$

11.【解答】由 z=x－2y 得$y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$，

作出不等式组对应的平面区域如图（阴影部分）：

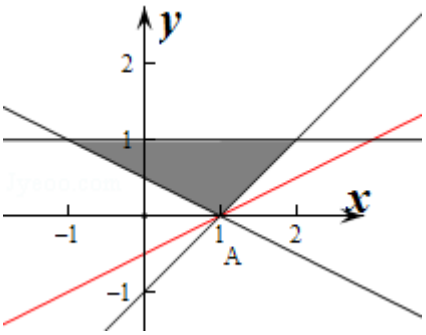
平移直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$，

由图象可知当直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$，过点 A（1，0）时，直线$y=\frac{1}{2}x-\frac{z}{2}$的截距最小，此时 z 最大，

代入目标函数 z=x－2y，得 z=1

∴目标函数 z=x－2y 的最大值是 1.

故答案为：1



12.【解答】∵$\vec{a}$，$\vec{b}$均为单位向量，

∴$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，

∵$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{b}-\vec{a})=\frac{3}{2}$，

∴$3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{a}|^2+2|\vec{b}|^2=\frac{3}{2}$，

即$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$，

设向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为 θ，则$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{1}{2}$，

∴$\theta=\frac{\pi}{3}$，

故答案为：$\frac{\pi}{3}$.

13.【解答】由题意，∵△A_1BA_2是等边三角形，

∴$b=\sqrt{3}a$，

∴$c=\sqrt{a^2+b^2}=2a$，

∴$e=\frac{c}{a}=2$.

故答案为：2.

14.【解答】∵$a_1=5$，$a_{n+1}=f(a_n)$，

∴$a_2=f(a_1)=f(5)=2$，

$a_3=f(a_2)=f(2)=1$，

$a_4=f(a_3)=f(1)=4$，

$a_5=f(a_4)=f(4)=5$，

$a_6=f(a_5)=f(5)=2$，

…

∴a_n的取值具有周期性，周期为 4，

则 $a_{2014}=a_2=2$，

故答案为：2

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.【解答】（Ⅰ）△ABC 中，∵$a^2+b^2=ab+3$，C=60°，∴$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos C=a^2+b^2-ab=3$，∴$c=\sqrt{3}$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得 $c^2=a^2+b^2-ab=3=(a+b)^2-3ab\geqslant(a+b)^2-3\times(\frac{a+b}{2})^2$，∴$(a+b)^2\leqslant 12$，$a+b\leqslant 2\sqrt{3}$，当且仅当 a=b 时，取等号.

再由三角形任意两边之和大于第三边可得 $a+b>c=\sqrt{3}$，

故要求的 a+b 的范围为（$\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}$].

16.【解答】（Ⅰ）根据已知可知消费者甲可以抽奖两次，

由从一个装有 1 个红球，2 个黄球，3 个白球的口袋中按规定不放回摸球两次共有：

$C_6^2=15$ 种不同情况；

其中恰有一个是红球有：$C_5^1=5$ 种不同情况，

故甲摸出的球中恰有一个是红球的概率 $P=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$.

（Ⅱ）甲获得 20 元奖金包括一个红球，一个白球与两个黄球，

共有 3+1=4 种不同情况，

故甲获得 20 元奖金的概率 P=$\frac{4}{15}$.

17.【解答】（Ⅰ）证明：∵E 为 BD 的中点，PB=PD，

∴PE⊥BD，

∵平面 PBD⊥平面 BCD，且平面 PBD∩平面 BCD=BD，

PE⊂平面 PBD，

∴直线 PE⊥平面 BCD.

（Ⅱ）解：如图所示，建立空间直角坐标系，

依题意得 E（0，0，0），B（$\frac{\sqrt{2}}{2}$，0，0），C（$-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sqrt{2}$，0），D（-1，0，0），P（0，0，$\frac{\sqrt{2}}{2}$），

∴$\overrightarrow{PB}=(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{PC}=(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$，$\overrightarrow{PD}=(-1, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2})$，

设平面 PBC 的法向量$\vec{n}=(x, y, z)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{PB}\cdot\vec{n}=x-z=0\\ \overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}=-x+2y-z=0\end{cases}$，取 x=1，得$\vec{n}=(1, 1, 1)$，

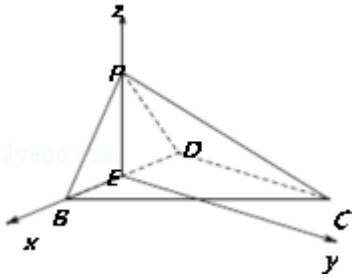
设平面 PCD 的法向量$\vec{m}=(a, b, c)$，

$\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\vec{m}=-a+2b-c=0\\ \overrightarrow{PD}\cdot\vec{m}=-a-c=0\end{cases}$，取 a=1，得$\vec{m}=(1, 0, -1)$，

∵$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，

∴平面 PBC⊥平面 PCD.

（Ⅲ）空间存在一点 Q 到点 P，B，C，D 的距离相等，这个距离的值为 1.



18.【解答】（Ⅰ）f′（x）=$\frac{1-a}{x}-\frac{a}{x^2}+1$，（x＞0）

∵曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线垂直于 y 轴，

∴f′（1）=0，即$\frac{1-a}{1}+\frac{-a}{1^2}+1=0$，

∴a=1，

（Ⅱ）∵f′（x）=$\frac{1-a}{x}-\frac{a}{x^2}+1=\frac{(x+1)(x-a)}{x^2}$，

①a≤1 时，在区间[1，e]，f′（x）≥0，

∴f（x）在[1，e]上递增，

∴x=1 时，f（x）取到最小值 f（1）=1+a，

②1＜a＜e 时，在区间[1，a]，f′（x）≤0，∴f（x）在[1，a]上递减，

在区间[a，e]，f′（x）≥0，∴f（x）在[a，e]递增，

∴x=a 时，f（x）取到最小值 f（a）=1+a+lna－alna，

③a≥e 时，在[1，e]上，f′（x）≤0，∴f（x）在[1，e]递减，

∴x=e 时，f（x）取到最小值 f（e）=1+a+$\frac{a}{e}$+e，

综上，当 a≤1 时，f（x）在[1，e]上的最小值是 f（1）=1+a，

1＜a＜e 时 f（x）在[1，e]最小值是 f（a）=1+a+lna－alna，

a≥e 时，f）（x）在[1，e]上的最小值是 f（e）=1+a+$\frac{a}{e}$+e.

19.【解答】（Ⅰ）∵椭圆 E：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的左右焦点分别为 F_1，F_2，

离心率为为$\frac{\sqrt{2}}{2}$．点 P 在椭圆 E 上，且△PF_1F_2的周长为 $4\sqrt{2}+4$.

∴$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\\2a+2c=4\sqrt{2}+4\end{cases}$，解得 a=2$\sqrt{2}$，c=2，

∴b^2=8－4=4，

∴椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$.

（Ⅱ）联立$\begin{cases}y=x+m\\\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，得 $3x^2+4mx+2m^2-8=0$，

△＞0，设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），

$x_1+x_2=-\frac{4m}{3}$，$x_1x_2=\frac{2m^2-8}{3}$，

$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{2[(-\frac{4m}{3})^2-4\times\frac{2m^2-8}{3}]}=\frac{4}{3}\cdot\sqrt{12-m^2}$，

原点 O 到直线 y=x+m 的距离 d=$\frac{|m|}{\sqrt{2}}$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot d\cdot|AB|=\frac{1}{2}\cdot\frac{|m|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{3}\sqrt{12-m^2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{12m^2-m^4}$,

$\therefore m^2=6$ 时，$S_{\triangle AOB}$ 取最大值 $\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{12\times 6-6^2}=2\sqrt{2}$.

$\therefore$△AOB 面积的最大值为 $2\sqrt{2}$.

20.【解答】（Ⅰ）当 $x>1$ 时，$f(x)=2^x\in(2,+\infty)$，$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上封闭，

$g(x)=\log_2 x\in(0,+\infty)$，$g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上不封闭；

（Ⅱ）设 $f_1(x)=f(x)$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))(n\in N^*, n\geqslant 2)$，

任取 $x\in D$，$\because f_1(x)$ 在 D 上封闭，$\therefore f_2(x)=f(f_1(x))\in D$，

…

$f_n(x)=f(f_{n-1}(x)))\in D$，

$\therefore f_n(x)$ 在 D 上封闭的充分条件是 $f_1(x)$ 在 D 上封闭；

（Ⅲ）是必要条件.（反证法）

假设 $f_n(x)$ 在 D 上不封闭，即存在 $x_0\in D$，使得 $f(x_0)\notin D$，

那么 $f_2(x_0)=f(f_1(x_0))$ 无意义，这与 $f_n(x)(n\in N^*)$ 的定义域均为 D 矛盾，

故假设不成立，

即 $f_1(x)$ 在 D 上封闭是 $f_n(x)$ 在 D 上封闭的必要条件.