2014 北京东城高三二模

数　　学（理）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

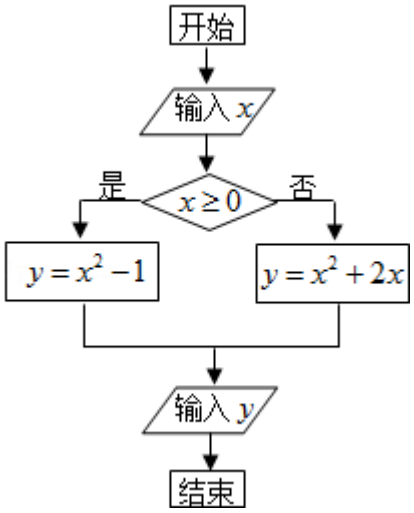
1．（5 分）已知集合 S={x∈R|x+1≥2}，T={－2，－1，0，1，2}，则 S∩T=（　　）

A．{2}　B．{1，2}　C．{0，1，2}　D．{－1，0，1，2}

2．（5 分）在复平面内，复数$\frac{2}{1-i}$－i^3对应的点位于（　　）

A．第一象限 B．第二象限 C．第三象限 D．第四象限

3．（5 分）已知一个算法的程序框图如图所示，当输出的结果为 0 时，输入的 x 值为（　　）



A．2 或－2　B．－1 或－2 C．2 或－1　D．1 或－2

4．（5 分）如果实数 x，y 满足条件$\begin{cases} x-y+1 \geqslant 0 \\ x+y+1 \leqslant 0 \\ y+1 \geqslant 0 \end{cases}$，则 z=2x－y 的最大值为（　　）

A．－3　B．－1　C．0　D．1

5．（5 分）设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_1=1$，公差 d=2，$S_{n+2}-S_n=36$，则 n=（　　）

A．5　B．6　C．7　D．8

6．（5 分）6 个人站成一排，其中甲、乙必须站在两端，且丙、丁相邻，则不同站法的种数为（　　）

A．12　B．18　C．24　D．36

7．（5 分）若直线$\begin{cases} x=1+t \\ y=a-t \end{cases}$（t 为参数）被圆$\begin{cases} x=2+2\cos\alpha \\ y=2+2\sin\alpha \end{cases}$（α 为参数）所截的弦长为 $2\sqrt{2}$，则 a 的值为（　　）

A．1 或 5　B．－1 或 5　C．1 或－5　D．－1 或－5

8．（5 分）对任意实数 a，b 定义运算“⊗”：$a \otimes b=\begin{cases} b, & a-b \geqslant 1 \\ a, & a-b<1 \end{cases}$，设 f（x）=（$x^2$－1）⊗（4+x），若函数 y=f（x）+k 的图象与 x 轴恰有三个不同交点，则 k 的取值范围是（　　）

A．（－2，1）　B．[0，1]　C．[－2，0）　D．[－2，1）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

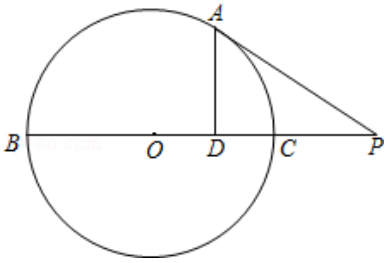
9．（5 分）已知 tanx=2，求 cos2x=_____．

10．（5 分）已知平面向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，若$|\vec{a}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$，则$|\vec{b}|$=_____；向量$\vec{a}$，$\vec{b}$夹角的大小为_____．

11．（5 分）在区间[0，6]上随机取两个实数 x，y，则事件“2x+y≤6”的概率为_____．

12．（5 分）如图所示，PA 与圆 O 相切于 A，直线 PO 交圆 O 于 B，C 两点，AD⊥BC，垂足为 D，且 D 是 OC 的中点，

若 PA=6，则 PC=_____.



13.（5 分）若直线 y=k（x+1）（k＞0）与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 A，B 两点，且 A，B 两点在抛物线的准线上的射影分别是 M，N，若|BN|=2|AM|，则 k 的值是_____.

14.（5 分）在棱长为 1 的正方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是正方体棱上一点（不包括棱的端点），|PA|+|PC_1|=m，

①若 m=2，则满足条件的点 P 的个数为_____.

②若满足|PA|+|PC_1|=m 的点 P 的个数为 6，则 m 的取值范围是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（13 分）已知函数 f（x）=$\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\sin(x+\frac{\pi}{2})$.

（Ⅰ）求 f（$\frac{\pi}{12}$）的值；

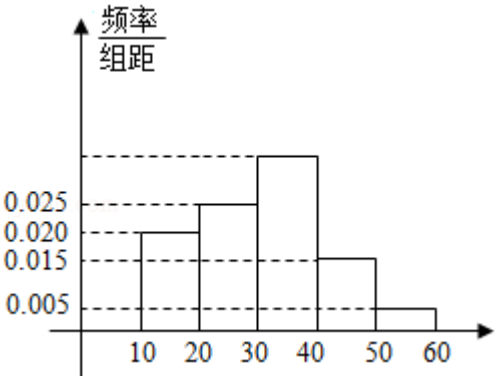
（Ⅱ）当 x∈[0，$\frac{\pi}{2}$]时，求函数 f（x）的最大值和最小值.

16.（13 分）“你低碳了吗？”这是某市为倡导建设资源节约型社会而发布的公益广告里的一句话．活动组织者为了解这则广告的宣传效果，随机抽取了 100 名年龄段在[10，20），[20，30），…，[50，60）的市民进行问卷调查，由此得到样本的频率分布直方图如图所示.

（Ⅰ）求随机抽取的市民中年龄段在[30，40）的人数；

（Ⅱ）从不小于 40 岁的人中按年龄段分层抽样的方法随机抽取 8 人，求[50，60）年龄段抽取的人数；

（Ⅲ）从按（Ⅱ）中方式得到的 8 人中再抽取 3 人作为本次活动的获奖者，记 X 为年龄在[50，60）年龄段的人数，求 X 的分布列及数学期望.

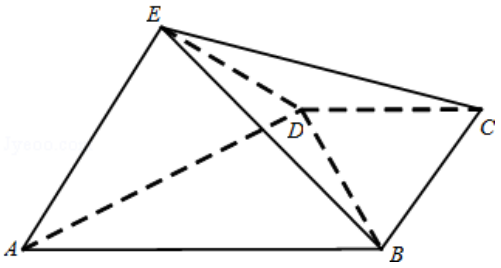


17.（14 分）如图，四棱锥 E－ABCD 中，平面 EAD⊥平面 ABCD，DC∥AB，BC⊥CD，EA⊥ED，且 AB=4，BC=CD=EA=ED=2.

（Ⅰ）求证：BD⊥平面 ADE；

（Ⅱ）求 BE 和平面 CDE 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在线段 CE 上是否存在一点 F 使得平面 BDF⊥平面 CDE，请说明理由.



18.（13 分）已知 a＞0，函数 f（x）=$\frac{ax}{x^2+1}$+2a，g（x）=alnx－x+a.

（Ⅰ）求函数 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）求证：对于任意的 x_1，x_2∈（0，e），都有 f（x_1）＞g（x_2）.

19.（13 分）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点为 F（2，0），且离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆方程；

（Ⅱ）斜率为 k 的直线 l 过点 F，且与椭圆交于 A，B 两点，P 为直线 x=3 上的一点，若△ABP 为等边三角形，求直线 l 的方程.

20.（14 分）设 a 是一个自然数，f（a）是 a 的各位数字的平方和，定义数列{a_n}：a_1是自然数，a_n=f（a_{n-1}）（n∈N^*，n≥2）.

（Ⅰ）求 f（99），f（2014）；

（Ⅱ）若 a_1≥100，求证：a_1＞a_2；

（Ⅲ）当 a_1＜1000 时，求证：存在 m∈N^*，使得 a_{3m}=a_{2m}.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】S={x∈R|x+1≥2}，则∴S={x∈R|x≥1}，

又∵T={﹣2，﹣1，0，1，2}，

故 S∩T={1，2}．

故选 B．

2.【解答】复数$\frac{2}{1-i}-i^3=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}+i=1+2i$，

复数的在复平面内的对应点（1，2）．

在复平面内，复数$\frac{2}{1-i}-i^3$对应的点位于第一象限．

故选：A．

3.【解答】由题意，$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-1=0\end{cases}$或$\begin{cases}x<0\\ -x^2-2x=0\end{cases}$

∴x=1 或﹣2

故选 D．

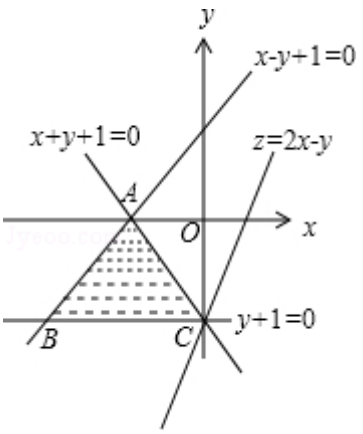
4.【解答】由约束条件$\begin{cases}x-y+1\geqslant 0\\ x+y+1\leqslant 0\\ y+1\geqslant 0\end{cases}$作可行域如图，

由 z=2x﹣y，得 y=2x﹣z，要使 z 最大，则直线 y=2x﹣z 在 y 轴上的截距最小，

由图可知，当直线 y=2x﹣z 过可行域内的点 C（0，﹣1）时直线 y=2x﹣z 在 y 轴上的截距最小．

∴z=2x﹣y 的最大值为 2×0﹣（﹣1）=1．

故选：D．



5.【解答】由 $S_{n+2}-S_n=36$，得：$a_{n+1}+a_{n+2}=36$，

即 $a_1+nd+a_1+(n+1)d=36$，

又 $a_1=1$，$d=2$，

∴$2+2n+2(n+1)=36$.

解得：n=8.

故选：D.

6.【解答】甲、乙必须站在两端有 $A_2^2=2$，剩下 4 个位置，4 个人排列，

丙、丁相邻，把丙和丁看成一个元素有 $A_2^2=2$，同另外 2 个人排列有 $A_3^3=6$，

根据乘法原理知共有 2×2×6=24 种结果，

故答案为：C.

7.【解答】直线 $\begin{cases}x=1+t\\y=a-t\end{cases}$（t 为参数）即 x+y－a－1=0，圆 $\begin{cases}x=2+2\cos\alpha\\y=2+2\sin\alpha\end{cases}$（α 为参数），即 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$，

表示以（2，2）为圆心、半径等于 2 的圆.

圆心到直线的距离为 $d=\frac{|2+2-a-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|3-a|}{\sqrt{2}}$，再根据弦长公式可得 $(\frac{|3-a|}{\sqrt{2}})^2+(\sqrt{2})^2=4=r^2$，

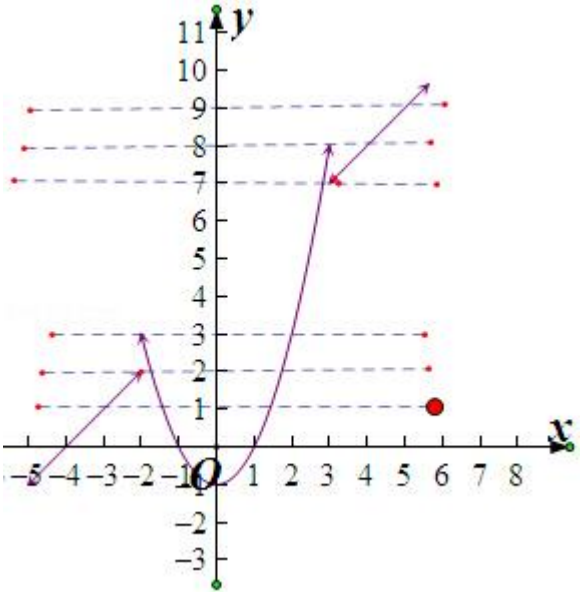
求得 a=1，或 a=5，

故选：A.

8.【解答】当 $(x^2-1)-(x+4)<1$ 时，$f(x)=x^2-1$，$(-2<x<3)$，

当 $(x^2-1)-(x+4)\geqslant 1$ 时，$f(x)=x+4$，$(x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant -2)$，

函数 $y=f(x)=\begin{cases}x^2-1,\ (-2<x<3)\\x+4,\ (x\leqslant -2,\ 或x\geqslant 3)\end{cases}$ 的图象如图所示：



由图象得：﹣2≤k＜1，函数 y=f（x）与 y=﹣k 的图象有 3 个交点，

即函数 y=f（x）+k 的图象与 x 轴恰有三个公共点；

故答案选：D.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】∵tanx=2，∴$\cos^2 x=\frac{1}{\sec^2 x}=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{5}$;

所以 $\cos 2x=2\cos^2 x-1=2\times\frac{1}{5}-1=-\frac{3}{5}$

故答案为 $-\frac{3}{5}$

10.【解答】∵$|\vec{a}|=3$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{13}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{3}{2}$，

∴$\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=13$，∴$3^2+\vec{b}^2-2\times\frac{3}{2}=13$，

解得$\vec{b}^2=7$

则$|\vec{b}|=\sqrt{7}$.

∴$\frac{3}{2}=\vec{a}\cdot\vec{b}=3\times\sqrt{7}\times\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$，

解得$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\sqrt{7}}{14}$.

∴$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$.

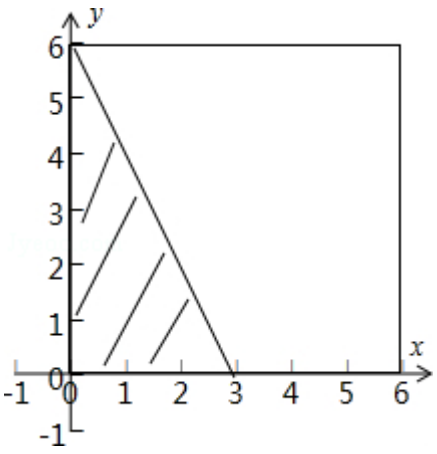
故答案为：$\sqrt{7}$，$\arccos\frac{\sqrt{7}}{14}$.

11.【解答】由题意，在区间[0，6]上随机取两个实数 x，y，在平面直角坐标系中做出对应的区域，

事件“2x+y≤6”对应的区域，如图所示：

所以事件“2x+y≤6”的概率为$\frac{\frac{1}{2}\times 3\times 6}{6\times 6}=\frac{1}{4}$

故答案为：$\frac{1}{4}$



12.【解答】连接 OA，则 OA⊥PA，

∴PA^2=PD•PO，

∵PA=6，D 是 OC 的中点，

∴（PC+$\frac{1}{2}$OC）•（PC+OC）=36，①

∵PA^2=PC•PB，

∴PC•（PC+2•OC）=36，②

由①②可得 PC=$2\sqrt{3}$.

故答案为：PC=$2\sqrt{3}$.

13.【解答】设抛物线 C：y^2=4x 的准线为 l：x=﹣1

直线 y=k（x+1）（k＞0）恒过定点 P（﹣1，0），

过 A、B 分别作 AM⊥l 于 M，BN⊥l 于 N，

由|BN|=2|AM|，则|BF|=2|AF|，

∴点 A 为 BP 的中点.

连接 OA，则|OA|=$\frac{1}{2}$|BF|，

∴|OA|=|AF|，

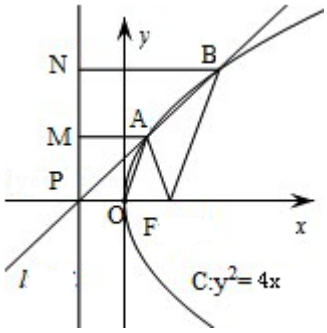
∴点 A 的横坐标为$\frac{1}{2}$，

∴点 A 的坐标为（$\frac{1}{2}$，$\sqrt{2}$），

把（$\frac{1}{2}$，$\sqrt{2}$）代入直线 l：y=k（x+1）（k＞0），

解得 k=$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.



14.【解答】∵正方体的棱长为 1，

∴$AC_1=\sqrt{3}$，

∵$|PA|+|PC_1|=2$，

∴点 P 是以 2c=$\sqrt{3}$为焦距，以 a=1 为长半轴，以$\frac{1}{2}$为短半轴的椭圆，

∵P 在正方体的棱上，

∴P 应是椭圆与正方体与棱的交点，

结合正方体的性质可知，满足条件的点应该在棱 B_1C_1，C_1D_1，CC_1，AA_1，AB，AD 上各有一点满足条件.

故满足条件的点 P 的个数为 6 个.

（2）∵$|PA|+|PC_1|=m＞|AC_1|=\sqrt{3}$，

∴$m＞\sqrt{3}$，

∵正方体的棱长为 1

∴正方体的面的对角线的长为$\sqrt{2}$，

∵点 P 的个数为 6，

∴$b＜\frac{\sqrt{2}}{2}$

∵短半轴长 $b=\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{m^2-3}}{2}$，

∴$\frac{\sqrt{m^2-3}}{2}＜\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴$m＜\sqrt{5}$，

∴m 的取值范围是（$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$）

故答案为：6，（$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$）.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.【解答】（Ⅰ）$f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$

$=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

∴f（x）$=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

∴ $f(\frac{\pi}{12})=\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）当$x\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$时，

$-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$.

∴当$2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$时，即 x=0 时，函数 f（x）取得最小值 0；

当$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时，即$x=\frac{\pi}{3}$时，函数 f（x）取得最大值$\frac{3}{2}$.

16.【解答】（Ⅰ）1﹣10×（0.020+0.025+0.015+0.005）=0.35，100×0.35=35，

即随机抽取的市民中年龄段在[30，40）的人数为 35．…（4 分）

（Ⅱ）100×0.15=15，100×0.05=5，

所以$5\times\frac{8}{20}=2$，

即抽取的 8 人中[50，60）年龄段抽取的人数为 2．　…（7 分）

（Ⅲ）X 的所有可能取值为 0，1，2.

$P(X=0)=\frac{C_6^3}{C_8^3}=\frac{5}{14}$;

$P(X=1)=\frac{C_2^1C_6^2}{C_8^3}=\frac{15}{28}$;

$P(X=2)=\frac{C_2^2C_6^1}{C_8^3}=\frac{3}{28}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{5}{14}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{28}$

X 的数学期望为$EX=0\times\frac{5}{14}+1\times\frac{15}{28}+2\times\frac{3}{28}=\frac{3}{4}$. …（13 分）

17.【解答】（I）证明：由 BC⊥CD，BC=CD=2，可得$BD=2\sqrt{2}$.

由 EA⊥ED，且 EA=ED=2，可得$AD=2\sqrt{2}$.

又 AB=4，所以 BD⊥AD.

又平面 EAD⊥平面 ABCD，平面 ADE∩平面 ABCD=AD，BD⊂平面 ABCD，

所以 BD⊥平面 ADE. …（5 分）

（II）解：建立空间直角坐标系 D－xyz，

则 D（0，0，0），$B(0,\ 2\sqrt{2},\ 0)$，$C(-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0)$，$E(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2})$，$\overrightarrow{BE}=(\sqrt{2},\ -2\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，

$\overrightarrow{DE}=(\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2})$，$\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0)$.

设$\vec{n}$=（x，y，z）是平面 CDE 的一个法向量，则$\begin{cases}x+z=0\\-x+y=0.\end{cases}$

令 x=1，则$\vec{n}$=（1，1，－1）.

设直线 BE 与平面 CDE 所成的角为 α，

则 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{3}$

所以 BE 和平面 CDE 所成的角的正弦值$\frac{\sqrt{2}}{3}$. …（10 分）

（III）解：设$\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CE}$，$\lambda\in[0,\ 1]$. $\overrightarrow{DC}=(-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 0)$，$\overrightarrow{CE}=(2\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，$\overrightarrow{DB}=(0,\ 2\sqrt{2},\ 0)$.

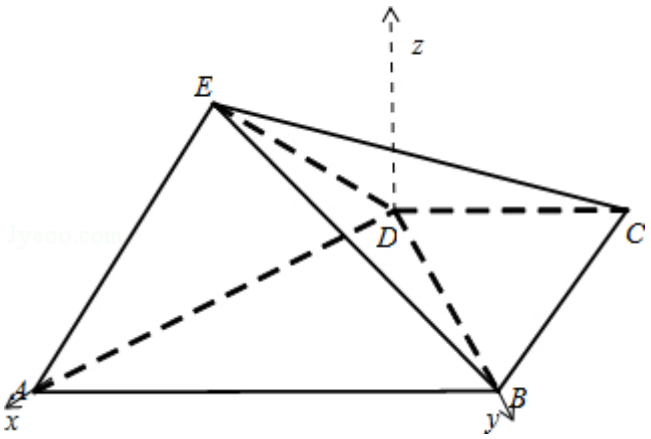
则$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{DC}+\lambda\overrightarrow{CE}=\sqrt{2}(2\lambda-1,\ -\lambda+1,\ \lambda)$.

设$\vec{\pi}$=（x'，y'，z'）是平面 BDF 一个法向量，则$\begin{cases}y'=0\\(2\lambda-1)x'+(-\lambda+1)y'+\lambda z'=0.\end{cases}$

令 x'=1，则$\vec{\pi}$=（1，0，$-\frac{2\lambda-1}{\lambda}$）.

若平面 BDF⊥平面 CDE，则$\vec{\pi}\cdot\vec{n}=0$，即 $1+\frac{2\lambda-1}{\lambda}=0$，$\lambda=\frac{1}{3}\in[0,\ 1]$.

所以，在线段 CE 上存在一点 F 使得平面 BDF⊥平面 CDE. …（14 分）



18.【解答】（Ⅰ）解：函数 f（x）的定义域为 R，$f'(x)=\frac{a(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{a(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$，

∵a＞0，

∴当 x＜－1，或 x＞1 时，f′（x）＜0；当－1＜x＜1 时，f′（x）＞0.

∴f（x）的单调递增区间为（－1，1），单调递减区间为（－∞，－1），（1，+∞）.

（Ⅱ）证明：f（x）在区间（0，1）上单调递增，在区间（1，e）上单调递减，

又 f（0）=2a，$f(e)=\frac{ea}{e^2+1}+2a>2a$，

∴当 x∈（0，e）时，f（x）＞2a.

由 g（x）=alnx－x+a，可得$g'(x)=\frac{a}{x}-1=\frac{a-x}{x}$.

∴当 a≥e 时，函数 g（x）在区间（0，e）上是增函数，

∴当 x∈（0，e）时，g（x）＜g（e）=2a－e＜2a.

∴当 x∈（0，e）时，

对于任意的 x_1，x_2∈（0，e），都有 f（x_1）＞2a，g（x_2）＜2a，∴f（x_1）＞g（x_2）.

当 0＜a＜e 时，函数 g（x）在区间（0，a）上是增函数，在区间（a，e）上是减函数，

∴当 x∈（0，e）时，g（x）≤g（a）=alna＜2a.

∴当 x∈（0，e）时，

对于任意的 x_1，x_2∈（0，e），都有 f（x_1）＞2a，g（x_2）＜2a，所以 f（x_1）＞g（x_2）.

综上，对于任意的 x_1，x_2∈（0，e），都有 f（x_1）＞g（x_2）.　…（13 分）

19.【解答】（Ⅰ）∵椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点为 F（2，0），且离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

∴c=2，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$a^2=b^2+c^2$，

解得 $a^2=6$，$b^2=2$.

∴椭圆方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

（Ⅱ）直线 l 的方程为 y=k（x﹣2）.

联立方程组$\begin{cases}y=k(x-2)\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1.\end{cases}$，消去 y 并整理，得（$3k^2+1$）$x^2$﹣$12k^2x+12k^2$﹣6=0.

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2）.

故$x_1+x_2=\frac{12k^2}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{12k^2-6}{3k^2+1}$.

则$|AB|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|$

$=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$

$=\frac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1}$.

设 AB 的中点为 M（x_0，y_0）.

可得$x_0=\frac{6k^2}{3k^2+1}$，$y_0=-\frac{2k}{3k^2+1}$.

直线 MP 的斜率为$-\frac{1}{k}$，又 $x_P=3$，

所以$|MP|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot|x_0-x_P|=\sqrt{\frac{k^2+1}{k^2}}\cdot\frac{3(k^2+1)}{(3k^2+1)}$.

当△ABP 为正三角形时，$|MP|=\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$，

$\therefore\sqrt{\frac{k^2+1}{k^2}}\cdot\frac{3(k^2+1)}{(3k^2+1)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{6}(k^2+1)}{3k^2+1}$，

解得 k=±1.

∴直线 l 的方程为 x﹣y﹣2=0，或 x+y﹣2=0.

20.【解答】（Ⅰ）解：f（99）=9^2+9^2=162；f（2014）=$2^2+0^2+1^2+4^2$=21.　　…（5 分）

（Ⅱ）证明：假设 a_1是一个 n 位数（n≥3），

那么可以设$a_1=b_n\cdot10^{n-1}+b_{n-1}\cdot10^{n-2}+\cdots+b_3\cdot10^2+b_2\cdot10+b_1$，

其中 0≤b_i≤9 且 b_i∈N（1≤i≤n），且 b_n≠0.

由　$a_2=f$（a_1）可得，

$a_2=b_n^2+b_{n-1}^2+\cdots+b_3^2+b_2^2+b_1^2$.

$a_1-a_2=(10^{n-1}-b_n)b_n+(10^{n-2}-b_{n-1})b_{n-1}+\cdots+(10^2-b_3)b_3+(10-b_2)b_1+(1-b_1)b_1$ ，所以 $a_1-a_2\geqslant(10^{n-1}-b_n)b_n-(b_1-1)b_1$.

因为 $b_n\neq0$，所以（$10^{n-1}-b_n$）$b_n\geqslant99$.

而（b_1-1）$b_1\leqslant72$，

所以 $a_1-a_2>0$，即 $a_1>a_2$. …（9 分）

（Ⅲ）证明：由 $a_1<1000$，即 $a_1\leqslant999$，可知 $a_2\leqslant9^2+9^2+9^2=243$.

同理 $a_n\leqslant999$，可知 $a_{n+1}\leqslant9^2+9^2+9^2=243$.

由数学归纳法知，对任意 $n\in N^*$，有 $a_n\leqslant999$.

即对任意 $n\in N^*$，有 $a_n\in\{1，2，3，…，999\}$.

因此，存在 $p，q\in N^*$（$p<q$），有 $a_p=a_q$.

则 $a_{p+1}=a_{q+1}$，$a_{p+2}=a_{q+2}$，…，$a_{q-1}=a_{q+q-p-1}$，

可得对任意 $n\in N^*$，$n\geqslant p$，有 $a_{n+q-p}=a_n$.

设 $q-p=T$，即对任意 $n\geqslant p$，有 $a_{n+T}=a_n$.

若 $T\geqslant p$，取 $m=T$，$n=2m$，则有 $a_{3m}=a_{2m}$.

若 $T<p$，由 $a_{n+T}=a_n$，可得 $a_{n+pT}=a_n$，

取 $m=pT$，$n=2m$，则有 $a_{3m}=a_{2m}$. …（14 分）