2014 北京东城高三二模

数　　学（文）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

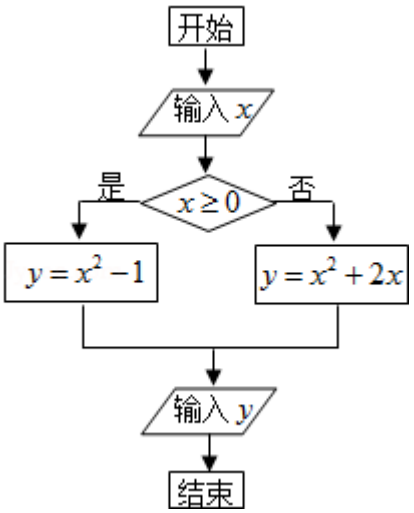
1．（5 分）已知集合 S={x∈R|x+1≥2}，T={－2，－1，0，1，2}，则 S∩T=（　　）

A．{2}　B．{1，2}　C．{0，1，2}　D．{－1，0，1，2}

2．（5 分）在复平面内，复数$\frac{2}{1-i}$对应的点位于（　　）

A．第一象限 B．第二象限 C．第三象限 D．第四象限

3．（5 分）已知一个算法的程序框图如图所示，当输出的结果为 0 时，输入的 x 值为（　　）



A．2 或－2　B．－1 或－2 C．2 或－1　D．1 或－2

4．（5 分）设等差数列{a_n}的前 n 项和为 S_n，若 $2a_6=6+a_7$，则 S_9 的值是（　　）

A．27　B．36　C．45　D．54

5．（5 分）已知 tanα=2，那么 sin2α 的值是（　　）

A．$-\frac{4}{5}$　B．$\frac{4}{5}$　C．$-\frac{3}{5}$　D．$\frac{3}{5}$

6．（5 分）已知函数 f（x）在[0，+∞）上是增函数，g（x）=f（|x|），若 g（lgx）＞g（1），则 x 的取值范围是（　　）

A．（0，10）　B．（10，+∞）　C．（$\frac{1}{10}$，10）　D．（0，$\frac{1}{10}$）∪（10，+∞）

7．（5 分）已知点 A（2，0），B（－2，4），C（5，8），若线段 AB 和 CD 有相同的垂直平分线，则点 D 的坐标是（　　）

A．（6，7）　B．（7，6）　C．（－5，－4）　D．（－4，－5）

8．（5 分）对任意实数 a，b 定义运算“⊗”：$a \otimes b=\begin{cases} b, & a-b \geqslant 1 \\ a, & a-b<1 \end{cases}$，设 f（x）=（$x^2$－1）⊗（4+x），若函数 y=f（x）+k 的图象与 x 轴恰有三个不同交点，则 k 的取值范围是（　　）

A．（－2，1）　B．[0，1]　C．[－2，0）　D．[－2，1）

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9.（5 分）函数$y=\log_{\frac{1}{2}}(4x-3)$的定义域是_____.

10.（5 分）已知平面向量$\vec{a}$=（1，2），$\vec{b}$=（－2，m），且$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则$|\vec{b}|$=_____.

11.（5 分）在区间[0，6]上随机取两个实数 x，y，则事件“2x+y≤6”的概率为_____.

12.（5 分）已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且对任意 $n\in N^*$，有 $2S_n=3a_n-2$，则 a_1=_____；S_n=_____.

13.（5 分）过点 A（－1，0）且斜率为 k（k＞0）的直线与抛物线 $y^2=4x$ 相交于 B，C 两点，若 B 为 AC 中点，则 k 的值是_____.

14.（5 分）在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 P 是正方体棱上一点（不包括棱的端点），$|PA|+|PC_1|=m$，

①若 m=2，则满足条件的点 P 的个数为_____.

②若满足 $|PA|+|PC_1|=m$ 的点 P 的个数为 6，则 m 的取值范围是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（13 分）已知函数 $f(x)=\sin^2x+\sqrt{3}\sin x\cos x$.

（Ⅰ）求 $f(\frac{\pi}{12})$ 的值；

（Ⅱ）当 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$时，求函数 f（x）的最大值和最小值.

16.（13 分）汽车是碳排放量比较大的行业之一，某地规定，从 2014 年开始，将对二氧化碳排放量超过 130g/km 的轻型汽车进行惩罚性征税．检测单位对甲、乙两品牌轻型汽车各抽取 5 辆进行二氧化碳排放量检测，记录如下（单位：g/km）.

甲	80	110	120	140	150
乙	100	120	x	100	160

经测算得乙品牌轻型汽车二氧化碳排放量的平均值为 $\overline{x}_乙=120$g/km.

（1）从被检测的 5 辆甲品牌轻型汽车中任取 2 辆，则至少有一辆二氧化碳排放量超过 130g/km 的概率是多少？

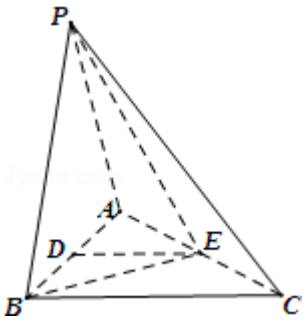
（2）求表中 x 的值，并比较甲、乙两品牌轻型汽车二氧化碳排放量的稳定性.

17.（14 分）如图，在三棱锥 P－ABC 中，PA=PB=AB=2，BC=3，∠ABC=90°，平面 PAB⊥平面 ABC，D，E 分别为 AB，AC 中点.

（Ⅰ）求证：DE∥面 PBC；

（Ⅱ）求证：AB⊥PE；

（Ⅲ）求三棱锥 B－PEC 的体积.



18.（13 分）已知 a∈R，函数 f（x）=$\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}$（a－2）$x^2$+b，g（x）=2alnx.

（Ⅰ）若曲线 y=f（x）与曲线 y=g（x）在它们的交点（1，c）处的切线互相垂直，求 a，b 的值；

（Ⅱ）设 F（x）=f′（x）－g（x），若对任意的 x_1，x_2∈（0，+∞），且 x_1≠x_2，都有 F（x_2）－F（x_1）＞a（x_2－x_1），求 a 的取值范围.

19.（13 分）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1 的一个焦点为 F（2，0），且离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

（Ⅰ）求椭圆方程；

（Ⅱ）过点 M（3，0）且斜率为 k 的直线与椭圆交于 A，B 两点，点 A 关于 x 轴的对称点为 C，求△MBC 面积的最大值.

20.（14 分）设 a 是一个自然数，f（a）是 a 的各位数字的平方和，定义数列{a_n}：a_1是自然数，a_n=f（a_{n-1}）（n∈N^*，n≥2）.

（Ⅰ）求 f（99），f（2014）；

（Ⅱ）若 a_1≥100，求证：a_1＞a_2；

（Ⅲ）求证：存在 m∈N^*，使得 a_m＜100.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】S={x∈R|x+1≥2}，则∴S={x∈R|x≥1}，

又∵T={﹣2，﹣1，0，1，2}，

故 S∩T={1，2}．

故选 B．

2.【解答】复数$\frac{2}{1-i}=\frac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$=1+i

∴复数的在复平面内的对应点（1，1）．

在复平面内，复数$\frac{2}{1-i}$对应的点位于第一象限．

故选：A．

3.【解答】由题意，$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2-1=0\end{cases}$或$\begin{cases}x<0\\ -x^2-2x=0\end{cases}$

∴x=1 或﹣2

故选 D．

4.【解答】在等差数列{a_n}中，

∵$2a_6=a_5+a_7$，

又由已知 $2a_6=6+a_7$，得 $a_5=6$，

∴$S_9=9a_5=54$．

故选：D．

5.【解答】∵tanα=2，

∴$\sin 2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{4}{5}$．

6.【解答】∵g（x）=f（|x|），

∴函数 g（x）是偶函数，

∵f（x）在[0，+∞）上是增函数，

∴不等式 g（lgx）＞g（1），等价为 g（|lgx|）＞g（1），

即|lgx|＞1，

则 lgx＞1 或 lgx＜－1，

解得 x＞10 或 0＜x＜$\frac{1}{10}$，

故选：D.

7.【解答】设 D（x，y），∵A（2，0），B（－2，4），

∴AB 点 E（0，2），AB 的斜率 k=$\frac{4-0}{-2-2}$=－1，

∴AB 的垂直平分线的斜率为 1，

∴AB 的垂直平分线的方程为 y=x+2，

∴CD 的中点 F（$\frac{x+5}{2}$，$\frac{y+8}{2}$）在 y=x+2 上，

∴$\frac{y+8}{2}$=$\frac{x+5}{2}$+2，①

又 CD 的斜率$\frac{y-8}{x-5}$=－1，②

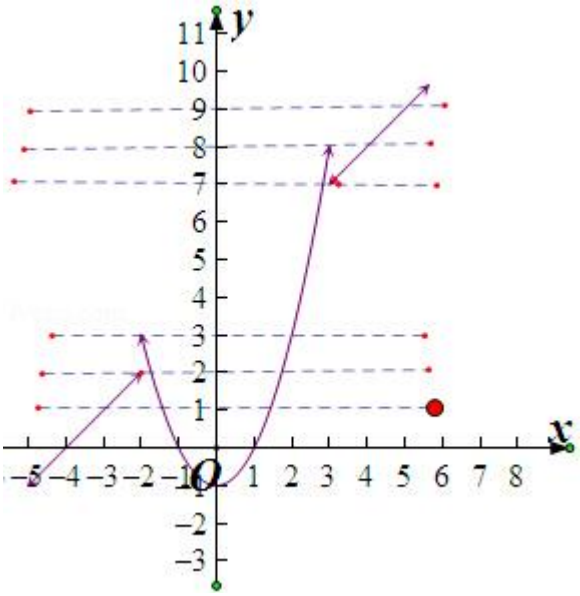
联立①②解得$\begin{cases}x=6\\y=7\end{cases}$，即 D（6，7）

故选：A.

8.【解答】当（x^2－1）－（x+4）＜1 时，f（x）=x^2－1，（－2＜x＜3），

当（x^2－1）－（x+4）≥1 时，f（x）=x+4，（x≥3 或 x≤－2），

函数 y=f（x）=$\begin{cases}x^2-1，(-2<x<3)\\x+4，(x\leqslant -2，或x\geqslant 3)\end{cases}$的图象如图所示：



由图象得：﹣2≤k＜1，函数 y=f（x）与 y=﹣k 的图象有 3 个交点，

即函数 y=f（x）+k 的图象与 x 轴恰有三个公共点；

故答案选：D.

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】∵4x﹣3＞0⇒x＞$\frac{3}{4}$,

∴函数的定义域是{x|x＞$\frac{3}{4}$}.

故答案是{x|x＞$\frac{3}{4}$}

10.【解答】∵$\vec{a}\parallel\vec{b}$，平面向量$\vec{a}$=（1，2），$\vec{b}$=（﹣2，m），

∴﹣2×2﹣m=0，解得 m=﹣4.

∴$\vec{b}$=（﹣2，﹣4），

∴ $|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$.

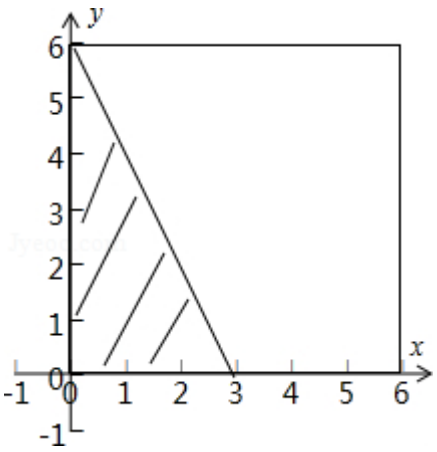
故答案为：$2\sqrt{5}$.

11.【解答】由题意，在区间[0，6]上随机取两个实数 x，y，在平面直角坐标系中做出对应的区域，

事件“2x+y≤6”对应的区域，如图所示：

所以事件“2x+y≤6”的概率为$\frac{\frac{1}{2}\times3\times6}{6\times6}=\frac{1}{4}$

故答案为：$\frac{1}{4}$



12.【解答】∵$2S_n=3a_n-2$，①

∴n=1 时，$2a_1=3a_1-2$，解得 $a_1=2$.

n≥2 时，$2S_{n-1}=3a_{n-1}-2$，②

①－②，得：$2a_n=3a_n-3a_{n-1}$，

整理，得 $a_n=3a_{n-1}$，

∴$\frac{a_n}{a_{n-1}}=3$，

∴$\{a_n\}$是首项为 2，公比为 3 的等比数列，

$S_n=\frac{2(1-3^n)}{1-3}=3^n-1$.

故答案为：2，3^n-1.

13.【解答】依题意知直线方程为 y=k（x+1），带入抛物线方程得 $y^2=4(\frac{y}{k}-1)$，整理得 $ky^2-4y+4k=0$，

解得 y=$\frac{2\pm2\sqrt{1-k^2}}{k}$，

∵B 为 AC 中点，

∴$y_B=\frac{2-2\sqrt{1-k^2}}{k}$，$y_C=\frac{2+2\sqrt{1-k^2}}{k}$，且$\frac{y_C+0}{2}=y_B$，

即$\frac{\frac{2+2\sqrt{1-k^2}}{k}}{2}=\frac{2-2\sqrt{1-k^2}}{k}$，求得 k=$\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

故答案为：$\frac{2\sqrt{2}}{3}$

14.【解答】∵正方体的棱长为 1，

∴$AC_1=\sqrt{3}$，

∵|PA|+|PC$_1$|=2，

∴点 P 是以 2c=$\sqrt{3}$为焦距，以 a=1 为长半轴，以$\frac{1}{2}$为短半轴的椭圆，

∵P 在正方体的棱上，

∴P 应是椭圆与正方体与棱的交点，

结合正方体的性质可知，满足条件的点应该在棱 B$_1$C$_1$，C$_1$D$_1$，CC$_1$，AA$_1$，AB，AD 上各有一点满足条件.

故满足条件的点 P 的个数为 6 个.

（2）∵|PA|+|PC$_1$|=m＞|AC$_1$|=$\sqrt{3}$，

∴m＞$\sqrt{3}$，

∵正方体的棱长为 1

∴正方体的面的对角线的长为$\sqrt{2}$，

∵点 P 的个数为 6，

∴b＜$\frac{\sqrt{2}}{2}$

∵短半轴长 b=$\sqrt{\frac{m^2}{4}-\frac{3}{4}}$=$\frac{\sqrt{m^2-3}}{2}$，

∴$\frac{\sqrt{m^2-3}}{2}$＜$\frac{\sqrt{2}}{2}$，

∴m＜$\sqrt{5}$，

∴m 的取值范围是（$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$）

故答案为：6，（$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$）.

三、解答题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.【解答】（Ⅰ）$f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x$

=$\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x$

=$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$

=$\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

∴f（x）=$\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$.

所以 f（$\frac{\pi}{12}$）=$\frac{1}{2}$.

（Ⅱ）当$x\in[0,\ \frac{\pi}{2}]$时，

$-\frac{\pi}{6}\leqslant 2x-\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{5\pi}{6}$.

∴当$2x-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$时，即 x=0 时，函数 f（x）取得最小值 0；

当$2x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$时，即$x=\frac{\pi}{3}$时，函数 f（x）取得最大值$\frac{3}{2}$.

16.【解答】（1）从被检测的 5 辆甲品牌的轻型汽车中任取 2 辆，共有 10 种不同的二氧化碳排放量结果：

（80，110），（80，120），（80，140），（80，150），（110，120），（110，140），

（110，150），（120，140），（120，150），（140，150）.

设“至少有一辆二氧化碳排放量超过 130g/km”为事件 A，则事件 A 包含以下 7 种不同的结果：

（80，140），（80，150），（110，140），（110，150），（120，140），（120，150），

（140，150）

∴$P(A)=\frac{7}{10}=0.7$.

答：至少有一辆二氧化碳排放量超过 130g/km 的概率为 0.7；

（2）由题可知，$\overline{x}_{乙}=120$，∴$\frac{480+x}{5}=120$，

解得 x=120.

又$\overline{x}_{甲}=120$，

∴$s^2_{甲}=\frac{1}{5}[(80-120)^2+(110-120)^2+(120-120)^2+(140-120)^2+(150-120)^2]=600$，

∴$s^2_{乙}=\frac{1}{5}[(100-120)^2+(120-120)^2+(120-120)^2+(100-120)^2+(160-120)^2]=480$，

∵$\overline{x}_{甲}=\overline{x}_{乙}=120$，　$s^2_{甲}>s^2_{乙}$，

∴乙品牌轻型汽车二氧化碳排放量的稳定性好.

17.【解答】（I）∵△ABC 中，D、E 分别为 AB、AC 中点，∴DE∥BC

∵DE⊄面 PBC 且 BC⊂面 PBC，∴DE∥面 PBC；

（II）连结 PD

∵PA=PB，D 为 AB 中点，∴PD⊥AB

∵DE∥BC，BC⊥AB，∴DE⊥AB，

又∵PD、DE 是平面 PDE 内的相交直线，∴AB⊥平面 PDE

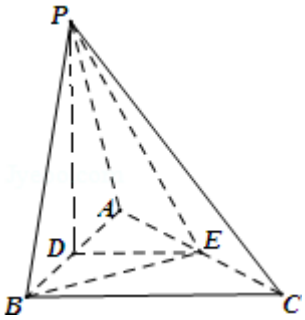
∵PE⊂平面 PDE，∴AB⊥PE；

（III）∵PD⊥AB，平面 PAB⊥平面 ABC，平面 PAB∩平面 ABC=AB

∴PD⊥平面 ABC，可得 PD 是三棱锥 P－BEC 的高

又∵PD=$\sqrt{3}$，$S_{\triangle BEC}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}$

∴三棱锥 B－PEC 的体积 $V=V_{P-BEC}=\frac{1}{3}S_{\triangle BEC}\times PD=\frac{\sqrt{3}}{2}$



18.【解答】（Ⅰ）$f'(x)=\frac{1}{2}x^2+(a-2)x$，$f'(1)=a-\frac{3}{2}$．$g'(x)=\frac{2a}{x}$，g'（1）=2a．

依题意有 f'（1）g'（1）=－1，

可得$2a(a-\frac{3}{2})=-1$，解得 a=1，或 $a=\frac{1}{2}$．

当 a=1 时，f（x）=$\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2+b$，g（x）=2lnx．

由$\begin{cases}f(1)=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+b=c\\g(1)=2\ln1=0=c\end{cases}$，解得 c=0．$b=\frac{1}{3}$，

当 a=$\frac{1}{2}$时，f（x）=$\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{4}x^2+b$，g（x）=lnx．

由$\begin{cases}f(1)=\frac{1}{6}-\frac{3}{4}+b=c\\g(1)=\ln1=0=c\end{cases}$，解得 c=0．$b=\frac{7}{12}$．

（Ⅱ）$F(x)=\frac{1}{2}x^2+(a-2)x-2a\ln x$．

不妨设 $x_1<x_2$，

则$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}>a$等价于 $F(x_2)-F(x_1)>a(x_2-x_1)$，

即 $F(x_2)-ax_2>F(x_1)-ax_1$．

设 G（x）=F（x）－ax，

则对任意的 x_1，$x_2\in(0,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，都有$\frac{F(x_2)-F(x_1)}{x_2-x_1}>a$，

等价于 G（x）=F（x）－ax 在（0，+∞）是增函数．$G(x)=\frac{1}{2}x^2-2a\ln x-2x$，

可得$G'(x)=x-\frac{2a}{x}-2=\frac{x^2-2x-2a}{x}$，

依题意有，对任意 x>0，有 $x^2-2x-2a\geqslant0$．

由 $2a\leqslant x^2-2x=(x-1)^2-1$，可得 $a\leqslant-\frac{1}{2}$.

19.【解答】（Ⅰ）∵椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的一个焦点为 F（2，0），且离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$.

∴c=2，$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$a^2=b^2+c^2$，

解得 $a^2=6$，$b^2=2$.

故椭圆方程为$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$.

（Ⅱ）直线 l 的方程为 y=k（x－3）.

联立方程组$\begin{cases}y=k(x-3)\\ \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1.\end{cases}$，消去 y 并整理，

得 $(3k^2+1)x^2-18k^2x+27k^2-6=0$.　（*）

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

故 $x_1+x_2=\frac{18k^2}{3k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{27k^2-6}{3k^2+1}$.

不妨设 $x_1<x_2$，显然 x_1，x_2 均小于 3.

则 $S_{\triangle AMC}=\frac{1}{2}\cdot|2y_1|\cdot(3-x_1)=|y_1|(3-x_1)$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot|2y_1|\cdot(x_2-x_1)=|y_1|(x_2-x_1)$.

$S_{\triangle MBC}=|S_{\triangle ABC}-S_{\triangle AMC}|=|y_1|(3-x_2)=|k|(3-x_1)(3-x_2)$

$=|k|[9-3(x_1+x_2)+x_1x_2]=\frac{3|k|}{3k^2+1}\leqslant\frac{3|k|}{2\sqrt{3k^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

等号成立时，解得 $k^2=\frac{1}{3}$，此时方程（*）为 $2x^2-6x+3=0$，满足△＞0.

所以△MBC 面积 S 的最大值为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

20.【解答】（Ⅰ）解：$f(99)=9^2+9^2=162$；$f(2014)=2^2+0^2+1^2+4^2=21$.

（Ⅱ）证明：假设 a_1 是一个 n 位数（n≥3），

那么可以设 $a_1=b_n\cdot10^{n-1}+b_{n-1}\cdot10^{n-2}+\cdots+b_3\cdot10^2+b_2\cdot10+b_1$，

其中 $0\leqslant b_i\leqslant9$ 且 $b_i\in N$（$1\leqslant i\leqslant n$），且 $b_n\neq0$.

由 $a_2=f(a_1)$ 可得，

$a_2=b_n^2+b_{n-1}^2+\cdots+b_3^2+b_2^2+b_1^2$.

$a_1-a_2=(10^{n-1}-b_n)b_n+(10^{n-2}-b_{n-1})b_{n-1}+\cdots+(10^2-b_3)b_3+(10-b_2)b_1+(1-b_1)b_1$

$=(10^{n-1}-b_n)b_n+(10^{n-2}-b_{n-1})b_{n-1}+\cdots+(10^2-b_3)b_3+(10-b_2)b_1+(1-b_1)b_1$

所以 $a_1-a_2\geqslant(10^{n-1}-b_n)b_n-(b_1-1)b_1$.

因为 $b_n\neq0$，所以（$10^{n-1}-b_n$）$b_n\geqslant99$.

而（b_1-1）$b_1\leqslant72$，

所以 $a_1-a_2>0$，即 $a_1>a_2$.

（Ⅲ）证明：由（Ⅱ）可知当 $a_1\geqslant100$ 时，$a_1>a_2$.

同理当 $a_n\geqslant100$ 时，$a_n>a_{n+1}$.

若不存在 $m\in N^*$，使得 $a_m<100$.

则对任意的 $n\in N^*$，有 $a_n\geqslant100$，总有 $a_n>a_{n+1}$.

则 $a_n\leqslant a_{n-1}-1$，可得 $a_n\leqslant a_1-(n-1)$.

取 $n=a_1$，则 $a_n\leqslant1$，与 $a_n\geqslant100$ 矛盾.

存在 $m\in N^*$，使得 $a_m<100$.