2013 北京西城高三二模

数　　学（理）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1．设全集 $U=\{0，1，2，3，4\}$，$A=\{0，1，2，3\}$，$B=\{2，3，4\}$，则$\complement_U(A\cap B)$等于（　　）

A．$\varnothing$　　B．$\{0，1\}$　　C．$\{0，1，4\}$　　D．$\{0，1，2，3，4\}$

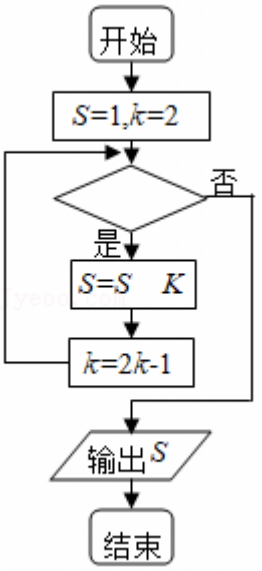
2．在复平面内，复数 z_1 的对应点是 Z_1（1，1），z_2 的对应点是 Z_2（1，－1），则 $z_1\cdot z_2=$（　　）

A．1　　B．2　　C．$-i$　　D．i

3．在极坐标系中，圆心为$(1，\frac{\pi}{2})$，且过极点的圆的方程是（　　）

A．$\rho=2\sin\theta$　　B．$\rho=-2\sin\theta$　　C．$\rho=2\cos\theta$　　D．$\rho=-2\cos\theta$

4．如图所示的程序框图表示求算式“$2\times3\times5\times9\times17$”之值，则判断框内可以填入（　　）



A．$k\leqslant10$　　B．$k\leqslant16$　　C．$k\leqslant22$　　D．$k\leqslant34$

5．设$a=2^{\frac{1}{2}}$，$b=3^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_32$，则（　　）

A．$b<a<c$　　B．$a<b<c$　　C．$c<b<a$　　D．$c<a<b$

6．对于直线 m，n 和平面 α，β，$m\perp\alpha$ 的一充分条件是（　　）

A．$m\perp n$，$n\perp\beta$，$\beta\perp\alpha$　　B．$m\perp\beta$，$n\perp\beta$，$n\perp\alpha$

C．$m\perp n$，$n\parallel\alpha$　　D．$m\parallel\beta$，$\beta\perp\alpha$

7．已知正六边形 $ABCDEF$ 的边长是 2，一条抛物线恰好经过该六边形的四个顶点，则抛物线的焦点到准线的距离是（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　　C．$\sqrt{3}$　　D．$2\sqrt{3}$

8．已知函数 $f(x)=x-[x]$，其中$[x]$表示不超过实数 x 的最大整数．若关于 x 的方程 $f(x)=kx+k$ 有三个不同的实根，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$[-1，-\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{4}，\frac{1}{3}]$　　B．$(-1，-\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{4}，\frac{1}{3})$

C．$[-\frac{1}{3}，-\frac{1}{4})\cup(\frac{1}{2}，1]$　　D．$(-\frac{1}{3}，-\frac{1}{4}]\cup[\frac{1}{2}，1)$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

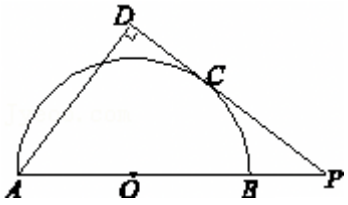
9．如图是甲，乙两组各 6 名同学身高（单位：*cm*）数据的茎叶图．记甲，乙两组数据的平均数依次为$\overline{x}_{甲}$和$\overline{x}_{乙}$，则$\overline{x}_{甲}$_____$\overline{x}_{乙}$．（填入：“＞”，“＝”，或“＜”）

甲组		乙组
1 3	15	0
5 7	16	1 2 3 4
0 2	17	2

10．$(2x-1)^5$ 的展开式中 x^3 项的系数是_____．（用数字作答）

11．在△*ABC* 中，*BC*＝2，*AC*＝$\sqrt{7}$，*B*＝$\frac{\pi}{3}$，则 *AB*＝_____；△*ABC* 的面积是_____．

12．如图，*AB* 是半圆 *O* 的直径，*P* 在 *AB* 的延长线上，*PD* 与半圆 *O* 相切于点 *C*，*AD*⊥*PD*．若 *PC*＝4，*PB*＝2，则 *CD*＝_____．



13．在等差数列{a_n}中，a_2＝5，a_1+a_4＝12，则 a_n＝_____；设$b_n=\frac{1}{a_n^2-1}$ $(n\in N^*)$，则数列{b_n}的前 *n* 项和 S_n＝_____．

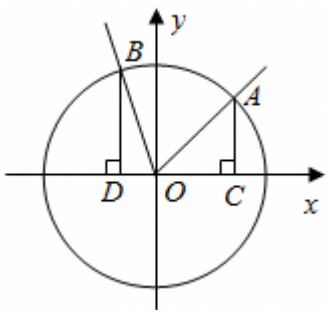
14．已知正数 *a*，*b*，*c* 满足 *a*+*b*＝*ab*，*a*+*b*+*c*＝*abc*，则 *c* 的取值范围是_____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15．（13 分）如图，在直角坐标系 *xOy* 中，角 α 的顶点是原点，始边与 *x* 轴正半轴重合，终边交单位圆于点 *A*，且$\alpha\in(\frac{\pi}{6}，\frac{\pi}{2})$．将角 α 的终边按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$，交单位圆于点 *B*．记 *A*（$x_1$，$y_1$），*B*（$x_2$，$y_2$）．

（Ⅰ）若$x_1=\frac{1}{3}$，求 x_2；

（Ⅱ）分别过 *A*，*B* 作 *x* 轴的垂线，垂足依次为 *C*，*D*．记△*AOC* 的面积为 S_1，△*BOD* 的面积为 S_2．若 S_1＝2S_2，求角 α 的值．



16.（13 分）某超市在节日期间进行有奖促销，凡在该超市购物满 300 元的顾客，将获得一次摸奖机会，规则如下：

奖盒中放有除颜色外完全相同的 1 个红球，1 个黄球，1 个白球和 1 个黑球．顾客不放回的每次摸出 1 个球，若摸到黑球则停止摸奖，否则就要将奖盒中的球全部摸出才停止．规定摸到红球奖励 10 元，摸到白球或黄球奖励 5 元，摸到黑球不奖励．

（Ⅰ）求 1 名顾客摸球 3 次停止摸奖的概率；

（Ⅱ）记 X 为 1 名顾客摸奖获得的奖金数额，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

17.（14 分）如图 1，四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PD\perp$ 底面 $ABCD$，面 $ABCD$ 是直角梯形，M 为侧棱 PD 上一点．该四棱锥的俯视图和侧（左）视图如图 2 所示．

（Ⅰ）证明：$BC\perp$ 平面 PBD；

（Ⅱ）证明：$AM\parallel$ 平面 PBC；

（Ⅲ）线段 CD 上是否存在点 N，使 AM 与 BN 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$？若存在，找到所有符合要求的点 N，并求 CN 的长；若不存在，说明理由．

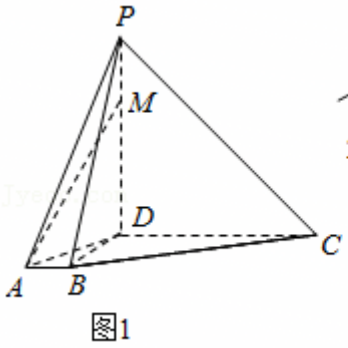
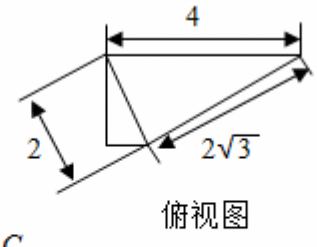
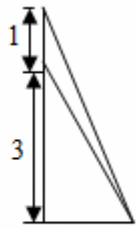


图1



俯视图



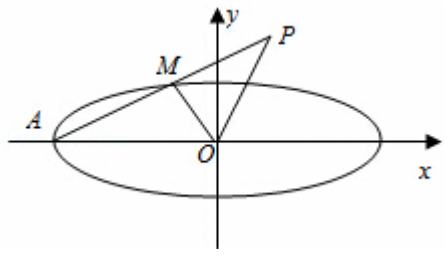
侧（左）视图

图2

18.（13 分）如图所示，椭圆 C：$x^2+\frac{y^2}{m}=1$（$0<m<1$）的左顶点为 A，M 是椭圆 C 上异于点 A 的任意一点，点 P 与点 A 关于点 M 对称．

（Ⅰ）若点 P 的坐标为（$\frac{9}{5}$，$\frac{4\sqrt{3}}{5}$），求 m 的值；

（Ⅱ）若椭圆 C 上存在点 M，使得 $OP\perp OM$，求 m 的取值范围．



19.（14 分）已知函数$f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+(2-a)x+1$，其中 $a\in\mathbf{R}$．

（Ⅰ）若 $a=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在点（1，$f(1)$）处的切线方程；

（Ⅱ）求 $f(x)$ 在区间[2，3]上的最大值和最小值．

20.（13 分）已知集合 $S_n=\{(x_1，x_2，\cdots，x_n)|x_1，x_2，\cdots，x_n$ 是正整数 1，2，3，…，n 的一个排列$\}$（n

≥2），函数$g(x)=\begin{cases}1， & \#160;x>0\\ -1， & \#160;\end{cases}\quad \#160;x<0.$

对于（a_1，a_2，…a_n）∈S_n，定义：b_i=g（a_i﹣a_1）+g（a_i﹣a_2）+…+g（a_i﹣a_{i-1}），i∈{2，3，…，n}，b_1=0，称b_i为a_i的满意指数．排列b_1，b_2，…，b_n为排列a_1，a_2，…，a_n的生成列；排列a_1，a_2，…，a_n为排列b_1，b_2，…，b_n的母列．

（Ⅰ）当n=6时，写出排列3，5，1，4，6，2的生成列及排列0，﹣1，2，﹣3，4，3的母列；

（Ⅱ）证明：若a_1，a_2，…，a_n和a'_1，a'_2，…，a'_n为S_n中两个不同排列，则它们的生成列也不同；

（Ⅲ）对于S_n中的排列a_1，a_2，…，a_n，定义变换τ：将排列a_1，a_2，…，a_n从左至右第一个满意指数为负数的项调至首项，其它各项顺序不变，得到一个新的排列．证明：一定可以经过有限次变换τ将排列a_1，a_2，…，a_n变换为各项满意指数均为非负数的排列．

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【答案】*C*

【分析】利用两个集合的交集的定义求出 $A\cap B$，再利用补集的定义求出$\complement_U(A\cap B)$.

【解答】解：∵$A\cap B=\{0，1，2，3\}\cap\{2，3，4\}=\{2，3\}$，全集 $U=\{0，1，2，3，4\}$，

∴$\complement_U(A\cap B)=\{0，1，4\}$，

故选：*C*.

2.【答案】*B*

【分析】利用复数的几何意义可得 $z_1=1+i$，$z_2=1-i$，再利用复数的乘法运算法则即可得出.

【解答】解：∵在复平面内，复数 z_1 的对应点是 Z_1（1，1），z_2 的对应点是 Z_2（1，－1），

∴$z_1=1+i$，$z_2=1-i$，

∴$z_1\cdot z_2=(1+i)(1-i)=1^2-i^2=1+1=2$.

故选：*B*.

3.【答案】*A*

【分析】先在直角坐标系下求出圆心在$(1，\frac{\pi}{2})$，且过极点的圆的直角坐标方程，再利用直角坐标与极坐标的互化公式化成极坐标方程即可.

【解答】解：∵在极坐标系中，圆心在$(1，\frac{\pi}{2})$，且过极点的圆的直角坐标方程是：

$x^2+(y-1)^2=1$，即 $x^2+y^2-2y=0$，

它的极坐标方程为：$\rho=2\sin\theta$.

故选：*A*.

4.【答案】*C*

【分析】由程序运行的过程看这是一个求几个数的乘积的问题，验算知 2×3×5×9×17 五个数的积故程序只需运行 5 次．运行 5 次后，*k* 值变为 33，即可得答案.

【解答】解：由题设条件可以看出，此程序是一个求几个数的连乘积的问题，

第一次乘入的数是 2，由于程序框图表示求算式“2×3×5×9×17”之值，

以后所乘的数依次为 3，5，9，17，

2×3×5×9×17 五个数的积故程序只需运行 5 次，运行 5 次后，*k* 值变为 33，

故判断框中应填 $k<33$，或者 $k\leqslant 22$.

故选：*C*.

5.【答案】*D*

【分析】通过 *a*，*b* 的 6 次方，判断 *a* 与 *b* 的大小，判断 *c* 的大小范围，即可判断大小关系.

【解答】解：因为$a=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}>1$，$b=3^{\frac{1}{3}}$，因为 $a^6=8$，$b^6=9$，所以 $b>a$，

因为 $c=\log_32\in(0，1)$，所以 $b>a>c$.

故选：D.

6.【答案】B

【分析】根据题意，结合正方体模型，对每一选支进行逐一判定，不正确的只需取出反例，正确的简单说明一下即可.

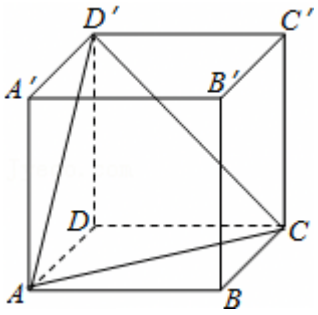
【解答】解：A、“$m\perp n$，$n\perp\beta$，$\beta\perp\alpha$”，如正方体中 $AD'\perp AB$，$AB\perp$面 $BCC'B'$，面 $ABCD\perp$面 $BCC'B'$，但 AD' 与面 $BCC'B'$ 不垂直，故推不出 $m\perp\alpha$，故 A 不正确.

B、根据 $m\perp\beta$，$n\perp\beta$，得 $m\parallel n$，又 $n\perp\alpha$，根据线面垂直的判定，可得 $m\perp\alpha$，故 B 正确；

C、“$m\perp n$，$n\parallel\alpha$”，如正方体中 $AB\perp BC$，$BC\parallel$平面 $A'B'C'D'$，但 AB 与平面 $A'B'C'D'$ 不垂直，故推不出 $m\perp\alpha$，故 C 不正确；

D、“$m\parallel\beta$，$\beta\perp\alpha$”，如正方体中 $A'C'\parallel$面 $ABCD$，面 $ABCD\perp$面 $BCC'B'$，但 $A'C'$ 与平面 $BCC'B'$ 不垂直．推不出 $m\perp\alpha$，故 D 不正确；

故选：B.



7.【答案】B

【分析】如图，设正六边形 $ABCDEF$ 的顶点 A、B、C、F 在抛物线 $y^2=2px$ 上．根据抛物线的对称性，设 A（x_1，1），F（x_2，2），由抛物线方程和正六边形的性质建立关于 x_1、x_2 和 p 的方程组，解之可得 $2p=\sqrt{3}$，由此即可得到抛物线焦点到准线的距离.

【解答】解：由题意，设正六边形 $ABCDEF$ 的顶点 A、B、C、F 在抛物线 $y^2=2px$ 上，

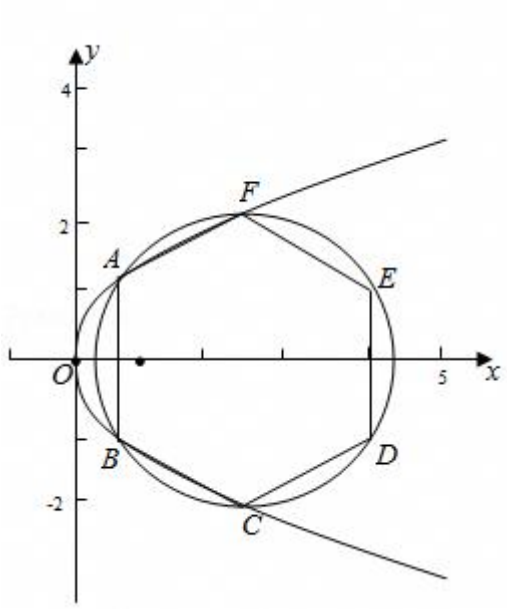
设 A（x_1，1），F（x_2，2），可得 $\begin{cases}x_1+\sqrt{3}=x_2 & ①\\ 2px_1=1 & ②\\ 2px_2=4 & ③\end{cases}$，

由②、③消去 p 得 $x_2=4x_1$，代入①可得 $x_1+\sqrt{3}=4x_1$，

所以 $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，代入②得 $2p=\sqrt{3}$，

根据抛物线的性质，可得焦点到准线的距离是 $p=\frac{\sqrt{3}}{2}$

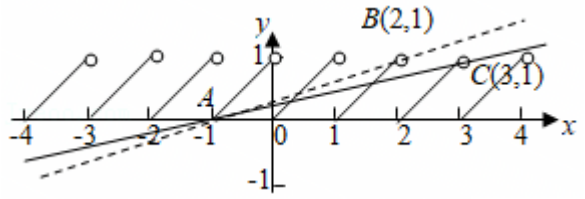
故选：B.



8.【答案】B

【分析】由已知中函数$f(x)=x-[x]$，可画出满足条件的图象，结合$y=kx+k$表示恒过$A(-1,0)$点斜率为k的直线，数形结合可得方程$f(x)=kx+k$有3个相异的实根．则函数$f(x)=x-[x]$与函数$f(x)=kx+k$的图象有且仅有3个交点，进而得到实数k的取值范围．

【解答】解：函数$f(x)=x-[x]$的图象如下图所示：



$y=kx+k$表示恒过$A(-1,0)$点斜率为k的直线

若方程$f(x)=kx+k$有3个相异的实根．

则函数$f(x)=x-[x]$与函数$f(x)=kx+k$的图象有且仅有3个交点

由图可得：

当$y=kx+k$过$(2,1)$点时，$k=\frac{1}{3}$，

当$y=kx+k$过$(3,1)$点时，$k=\frac{1}{4}$，

当$y=kx+k$过$(-2,1)$点时，$k=-1$，

当$y=kx+k$过$(-3,1)$点时，$k=-\frac{1}{2}$，

则实数k满足$\frac{1}{4}\leq k<\frac{1}{3}$或$-1<k\leq-\frac{1}{2}$.

故选：B.

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分．

9.【答案】见试题解答内容

【分析】由茎叶图，分别确定出甲、乙两班同学身高数，通过计算平均数比较出大小．

【解答】解：由茎叶图，甲班平均身高为（151+153+165+167+170+172）÷6＝163

乙班平均身高为（150+161+162+163+164+172）÷6＝162＜163．

则 $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$．

故答案为：＞．

10．【答案】见试题解答内容

【分析】先求得二项展开式的通项公式，再令 x 的幂指数等于 3，求得 r 的值，即可求得（$2x-1$）^{5} 的展开式中 x^3 项的系数．

【解答】解：在（$2x-1$）^{5} 的展开式中，通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot(2x)^{5-r}\cdot(-1)^r$，

令 $5-r=3$，求得 $r=2$，故（$2x-1$）^{5} 的展开式中 x^3 项的系数是$C_5^2\cdot 2^3\cdot(-1)^2=80$，

故答案为 80．

11．【答案】见试题解答内容

【分析】根据余弦定理 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，建立关于边 AB 的方程，解之即可得到边 AB 的值，再由正弦定理关于面积的公式，代入题中数据即可求出△ABC 的面积．

【解答】解：∵在△ABC 中，$BC=2$，$AC=\sqrt{7}$，$B=\frac{\pi}{3}$，

∴由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\frac{\pi}{3}$，即 $7=AB^2+2^2-2\times2\times AB\cos\frac{\pi}{3}$，

化简整理得 $AB^2-2AB-3=0$，可得 $AB=3$（舍去 -1）

根据正弦定理，得△ABC 的面积为

$S=\frac{1}{2}BC\cdot AB\sin B=\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

故答案为：3，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

12．【答案】见试题解答内容

【分析】由 PD 与半圆 O 相切于点 C 及切割线定理得 $PC^2=PB\cdot PA$，$OC\perp PD$．再利用 $AD\perp PD$ 得到 $OC\parallel AD$．利用平行线分线段成比例即可得出．

【解答】解：设圆的半径为 R．连接 OC．

∵PD 与半圆 O 相切于点 C，∴$PC^2=PB\cdot PA$，$OC\perp PD$．．

∵$PC=4$，$PB=2$，

∴$4^2=2\times(2+2R)$，

解得 $R=3$．

又∵$AD\perp PD$，∴$OC\parallel AD$．

∴$\frac{PC}{CD}=\frac{PO}{OA}$．

∴$\frac{4}{CD}=\frac{2+3}{3}$，解得 $CD=\frac{12}{5}$．

故答案为$\frac{12}{5}$．

13.【答案】2n+1；$\frac{n}{4(n+1)}$.

【分析】由条件利用等差数列的通项公式求得首项和公差，即可得到等差数列{a_n}的通项公式．把数列{b_n}的通项公式

求出来，再用裂项法进行数列求和．

【解答】解：设等差数列{a_n}的公差为 d，则由 a_2=5，a_1+a_4=12 可得 $\begin{cases}a_1+d=5\\2a_1+3d=12\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=3\\d=2\end{cases}$，

故 a_n=3+（n﹣1）2=2n+1．

$\because b_n=\frac{1}{a_n^2-1}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}]$，

∴数列{b_n}的前 n 项和 S_n=$\frac{1}{4}[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}]$=$\frac{1}{4}[1-\frac{1}{n+1}]=\frac{n}{4(n+1)}$，

故答案为：2n+1，$\frac{n}{4(n+1)}$.

14.【答案】见试题解答内容

【分析】由正数 a，b，c 满足 a+b=ab，利用基本不等式即可得出 ab≥4．由 a+b+c=abc，变形为$c=1+\frac{1}{ab-1}$即可得出．

【解答】解：∵正数 a，b，c 满足 a+b=ab，∴$ab\geq 2\sqrt{ab}$，化为$\sqrt{ab}(\sqrt{ab}-2)\geq 0$，

∴$\sqrt{ab}\geq 2$，∴ab≥4，当且仅当 a=b=2 时取等号，∴ab∈[4，+∞）．

∵a+b+c=abc，∴ab+c=abc，∴$c=\frac{ab}{ab-1}=\frac{ab-1+1}{ab-1}=1+\frac{1}{ab-1}$.

∵ab≥4，∴$1<1+\frac{1}{ab-1}\leq\frac{4}{3}$，∴$1<1+\frac{1}{ab-1}\leq\frac{4}{3}$.

∴c 的取值范围是$(1，\frac{4}{3}]$.

故答案为$(1，\frac{4}{3}]$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15.【答案】见试题解答内容

【分析】（Ⅰ）由三角函数定义，得 x_1=cosα=$\frac{1}{3}$，由此利用同角三角函数的基本关系求得 sinα 的值，再根据$x_2=cos(\alpha+\frac{\pi}{3})$，利用两角和的余弦公式求得结果．

（Ⅱ）依题意得 y_1=sinα，$y_2=sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$，分别求得 S_1 和 S_2 的解析式，再由 S_1=2S_2 求得 cos2α=0，根据 α 的范围，求得 α 的值．

【解答】（Ⅰ）解：由三角函数定义，得 x_1=cosα，$x_2=cos(\alpha+\frac{\pi}{3})$.

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{6}，\frac{\pi}{2})$，$cos\alpha=\frac{1}{3}$，所以 $sin\alpha=\sqrt{1-cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $x_2=cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}sin\alpha=\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$.

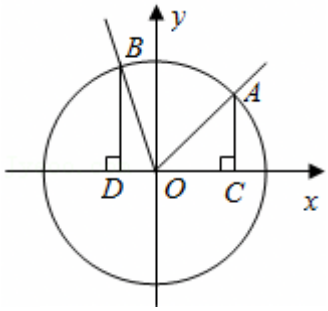
（Ⅱ）解：依题意得 y_1=sinα，$y_2=sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$．所以 $S_1=\frac{1}{2}x_1y_1=\frac{1}{2}cos\alpha\cdot sin\alpha=\frac{1}{4}sin2\alpha$，

$S_2=\frac{1}{2}|x_2|y_2=\frac{1}{2}[-cos(\alpha+\frac{\pi}{3})]\cdot sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{4}sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})$.

依题意 $S_1=2S_2$ 得 $sin2\alpha=-2sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})$，即 $\sin2\alpha=-2[\sin2\alpha\cos\frac{2\pi}{3}+\cos2\alpha\sin\frac{2\pi}{3}]=\sin2\alpha-\sqrt{3}\cos2\alpha$，

整理得 $\cos2\alpha=0$.

因为 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<2\alpha<\pi$，所以 $2\alpha=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$.



16.【答案】（Ⅰ）$\frac{1}{4}$；

（Ⅱ）

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

10.

【分析】（Ⅰ）设“1 名顾客摸球 3 次停止摸奖”为事件 A，然后由$P(A)=\frac{A_3^2}{A_4^3}$求出概率；

（Ⅱ）随机变量 X 的所有取值为 0，5，10，15，20.，分别求出 X 取各个值时的概率即可求解随机变量 X 的分布列及期望

【解答】解：（Ⅰ）设“1 名顾客摸球 3 次停止摸奖”为事件 A，

则$P(A)=\frac{A_3^2}{A_4^3}=\frac{1}{4}$,

故 1 名顾客摸球 3 次停止摸奖的概率为$\frac{1}{4}$.

（Ⅱ）随机变量 X 的所有取值为 0，5，10，15，20.

$P(X=0)=\frac{1}{4}$，$P(X=5)=\frac{A_2^2}{A_4^2}=\frac{1}{6}$,

$P(X=10)=\frac{1}{A_4^2}+\frac{A_2^2}{A_4^3}=\frac{1}{6}$,

$P(X=15)=\frac{C_2^1\cdot A_2^2}{A_4^3}=\frac{1}{6}$,

$P(X=20)=\frac{A_3^3}{A_4^4}=\frac{1}{4}$.

所以，随机变量 X 的分布列为：

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

$EX=0\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}+15\times\frac{1}{6}+20\times\frac{1}{4}=10$.

17.【答案】见试题解答内容

【分析】（Ⅰ）利用俯视图和勾股定理的逆定理可得 $BC\perp BD$，利用线面垂直的性质定理可得 $BC\perp PD$，再利用线面垂直的判定定理即可证明；

（Ⅱ）取 PC 上一点 Q，使 PQ：PC=1：4，连接 MQ，BQ．利用左视图和平行线分线段成比例的判定和性质即可得出 $MQ\parallel CD$，$MQ=\frac{1}{4}CD$．

再利用平行四边形的判定和性质定理即可得出 $AM\parallel BQ$，利用线面平行的判定定理即可证明．

（Ⅲ）通过建立空间直角坐标系，利用异面直线的方向向量所成的角的夹角公式即可得出．

【解答】（Ⅰ）证明：由俯视图可得，$BD^2+BC^2=CD^2$，

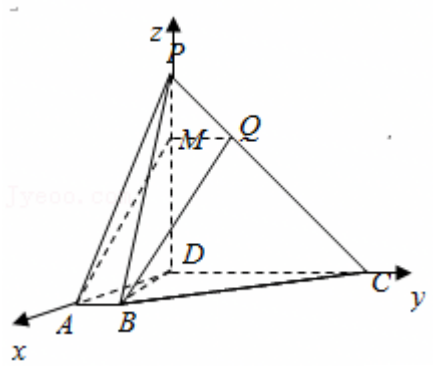
∴$BC\perp BD$．

又∵$PD\perp$平面 $ABCD$，

∴$BC\perp PD$，

∵$BD\cap PD=D$，

∴$BC\perp$平面 PBD．



（Ⅱ）

证明：取 PC 上一点 Q，使 PQ：PC=1：4，连接 MQ，BQ．

由左视图知 PM：PD=1：4，∴$MQ\parallel CD$，$MQ=\frac{1}{4}CD$．

在△BCD 中，易得∠CDB=60°，∴∠ADB=30°．

又 BD=2，∴AB=1，$AD=\sqrt{3}$．

又∵$AB\parallel CD$，$AB=\frac{1}{4}CD$，

∴$AB\parallel MQ$，$AB=MQ$．

∴四边形 $ABQM$ 为平行四边形，

∴$AM\parallel BQ$．

∵$AM\not\subset$平面 PBC，$BQ\subset$平面 PBC，

∴直线 $AM\parallel$平面 PBC．

（Ⅲ）解：线段 CD 上存在点 N，使 AM 与 BN 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$．证明如下：

∵PD⊥平面 $ABCD$，DA⊥DC，建立如图所示的空间直角坐标系 D﹣xyz．

∴$D(0，0，0)$，$A(\sqrt{3}，0，0)$，$B(\sqrt{3}，1，0)$，$C(0，4，0)$，$M(0，0，3)$．

设 $D(0，0，0)$，$A(\sqrt{3}，0，0)$，$B(\sqrt{3}，1，0)$，$C(0，4，0)$，$M(0，0，3)$，其中 N（0，t，0）．

∴$\vec{AM}=(-\sqrt{3}，0，3)$，$\vec{BN}=(-\sqrt{3}，t-1，0)$．

要使 AM 与 BN 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，则有 $\frac{|\vec{AM}\cdot\vec{BN}|}{|\vec{AM}||\vec{BN}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

∴$\frac{|3|}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+(t-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，解得 t=0 或 2，均适合 N（0，t，0）．

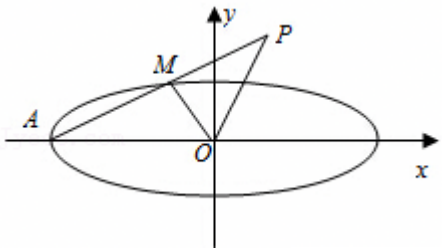
故点 N 位于 D 点处，此时 CN=4；或 CD 中点处，此时 CN=2，有 AM 与 BN 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$．

18．【答案】见试题解答内容

【分析】（Ⅰ）由题意知 M 是线段 AP 的中点，由中点坐标公式可得 M 坐标，代入椭圆方程即可得到 m 值；

（Ⅱ）设 M（x_0，y_0）（﹣1<x_0<1），则 $x_0^2+\frac{y_0^2}{m}=1$，①由中点坐标公式可用 M 坐标表示 P 点坐标，由 OP⊥OM 得$\vec{OP}\cdot\vec{OM}=0$②，联立 ①②消去 y_0，分离出 m 用基本不等式即可求得 m 的范围；

【解答】解：（Ⅰ）依题意，M 是线段 AP 的中点，



因为 A（﹣1，0），$P(\frac{9}{5}，\frac{4\sqrt{3}}{5})$，

所以点 M 的坐标为$(\frac{2}{5}，\frac{2\sqrt{3}}{5})$．

由于点 M 在椭圆 C 上，

所以 $\frac{4}{25}+\frac{12}{25m}=1$，解得 $m=\frac{4}{7}$．

（Ⅱ）设 M（x_0，y_0）（﹣1<x_0<1），则 $x_0^2+\frac{y_0^2}{m}=1$，①

因为 M 是线段 AP 的中点，所以 P（2x_0+1，2y_0）．

因为 OP⊥OM，所以$\vec{OP}\perp\vec{OM}$，

所以$\vec{OP}\cdot\vec{OM}=0$，即 $x_0(2x_0+1)+2{y_0}^2=0$．②

由①，②消去 y_0，整理得 $m=\frac{2x_0^2+x_0}{2x_0^2-2}$．

所以 $m=1+\frac{1}{2(x_0+2)+\frac{6}{x_0+2}-8}\leq\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$，

当且仅当 $x_0=-2+\sqrt{3}$时，上式等号成立．

所以 m 的取值范围是$(0，\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}]$．

19．【答案】见试题解答内容

【分析】（Ⅰ）求导数，把 a=2 代入可得$f(1)=-\frac{1}{3}$，f'（1）=﹣2，由点斜式可写直线的方程，化为一般式即可；

（Ⅱ）由△=8a，分 a≤0，当 a>0 两大类来判断，其中当 a>0 时，又需分 0<a≤2，2<a<8，a≥8，三种情形来判断，综合可得答案．

【解答】（Ⅰ）解：f（x）的定义域为 **R**，且f'（x）=2x^2﹣4x+2﹣a，当 a=2 时，$f(1)=-\frac{1}{3}$，f'（1）=﹣2，

所以曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线方程为 $y+\frac{1}{3}=-2(x-1)$，即 6x+3y﹣5=0．（4 分）

（Ⅱ）解：方程f'（x）=0 的判别式为△=（﹣4）^{2}﹣4×2×（2﹣a）=8a．

（ⅰ）当 a≤0 时，f'（x）≥0，所以f（x）在区间（2，3）上单调递增，所以f（x）在区间[2，3]上的最小值是$f(2)=\frac{7}{3}-2a$；最大值是f（3）=7﹣3a．

（ⅱ）当 a>0 时，令f'（x）=0，得 $x_1=1-\frac{\sqrt{2a}}{2}$，或$x_2=1+\frac{\sqrt{2a}}{2}$．$f$（$x$）和$f'$（$x$）的情况如下：

x	（﹣∞，x_1）	x_1	（x_1，x_2）	x_2	（x_2，+∞）
f'（x）	+	0	-	0	+
f（x）	↗		↘		↗

故f（x）的单调增区间为$(-\infty，\ 1-\frac{\sqrt{2a}}{2})$，$(1+\frac{\sqrt{2a}}{2}，\ +\infty)$；单调减区间为$(1-\frac{\sqrt{2a}}{2}，\ 1+\frac{\sqrt{2a}}{2})$．

①当 0<a≤2 时，x_2≤2，此时f（x）在区间（2，3）上单调递增，所以f（x）在区间[2，3]上的最小值是$f(2)=\frac{7}{3}-2a$；最大值是f（3）=7﹣3a．

②当 2<a<8 时，x_1<2<x_2<3，此时f（x）在区间（2，x_2）上单调递减，在区间（x_2，3）上单调递增，所以f（x）在区间[2，3]上的最小值是 $f(x_2)=\frac{5}{3}-a-\frac{a\sqrt{2a}}{3}$．

因为 $f(3)-f(2)=\frac{14}{3}-a$，

所以 当$2<a\leq\frac{14}{3}$时，f（x）在区间[2，3]上的最大值是 f（3）=7﹣3a；当$\frac{14}{3}<a<8$时，f（x）在区间[2，3]上的最大值是$f(2)=\frac{7}{3}-2a$．

③当 a≥8 时，x_1<2<3≤x_2，此时f（x）在区间（2，3）上单调递减，

所以f（x）在区间[2，3]上的最小值是f（3）=7﹣3a；最大值是$f(2)=\frac{7}{3}-2a$．

综上可得，

当 $a\leqslant 2$ 时，$f(x)$ 在区间[2，3]上的最小值是$\frac{7}{3}-2a$，最大值是 $7-3a$；

当$2<a\leq\frac{14}{3}$时，$f(x)$ 在区间[2，3]上的最小值是$\frac{5}{3}-a-\frac{a\sqrt{2a}}{3}$，最大值是 $7-3a$；

当$\frac{14}{3}<a<8$时，$f(x)$ 在区间[2，3]上的最小值是$\frac{5}{3}-a-\frac{a\sqrt{2a}}{3}$，最大值是$\frac{7}{3}-2a$；

当 $a\geqslant 8$ 时，$f(x)$ 在区间[2，3]上的最小值是 $7-3a$，最大值是$\frac{7}{3}-2a$.

20.【答案】见试题解答内容

【分析】（Ⅰ）由 $b_i=g(a_i-a_1)+g(a_i-a_2)+\cdots+g(a_i-a_{i-1})$，$g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0\end{cases}$及“生成列”与“母列”的定义可求得当 $n=6$ 时排列 3，5，1，4，6，2 的生成列及排列 0，－1，2，－3，4，3 的母列；

（Ⅱ）设 a_1，a_2，…，a_n 的生成列是 b_1，b_2，…，b_n；a'_1，a'_2，…，a'_n 的生成列是与 b'_1，b'_2，…，b'_n，从右往左数，设排列 a_1，a_2，…，a_n 与 a'_1，a'_2，…，a'_n 第一个不同的项为 a_k 与 a'_k，由满意指数的定义可知 a_i 的满意指数，从而可证得且 $a_k\neq a'_k$，于是可得排列 a_1，a_2，…，a_n 和 a'_1，a'_2，…，a'_n 的生成列也不同.

（Ⅲ）设排列 a_1，a_2，…，a_n 的生成列为 b_1，b_2，…，b_n，且 a_k 为 a_1，a_2，…，a_n 中从左至右第一个满意指数为负数的项，$\Rightarrow b_1\geqslant 0$，$b_2\geqslant 0$，…，$b_{k-1}\geqslant 0$，$b_k\leqslant -1$，经过一次变换 τ 后，整个排列的各项满意指数之和将至少增加 2，利用 a_i 的满意指数 $b_i\leqslant i-1$，可知整个排列的各项满意指数之和不超过 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$，从而可使结论得证.

【解答】（Ⅰ）解：当 $n=6$ 时，排列 3，5，1，4，6，2 的生成列为 0，1，－2，1，4，－3；

排列 0，－1，2，－3，4，3 的母列为 3，2，4，1，6，5.

（Ⅱ）证明：设 a_1，a_2，…，a_n 的生成列是 b_1，b_2，…，b_n；a'_1，a'_2，…，a'_n 的生成列是与 b'_1，b'_2，…，b'_n，

从右往左数，设排列 a_1，a_2，…，a_n 与 a'_1，a'_2，…，a'_n 第一个不同的项为 a_k 与 a'_k，即：$a_n=a'_n$，$a_{n-1}=a'_{n-1}$，…，$a_{k+1}=a'_{k+1}$，$a_k\neq a'_k$.

显然 $b_n=b'_n$，$b_{n-1}=b'_{n-1}$，…，$b_{k+1}=b'_{k+1}$，下面证明：$b_k\neq b'_k$.

由满意指数的定义知，a_i 的满意指数为排列 a_1，a_2，…，a_n 中前 $i-1$ 项中比 a_i 小的项的个数减去比 a_i 大的项的个数.

由于排列 a_1，a_2，…，a_n 的前 k 项各不相同，设这 k 项中有 l 项比 a_k 小，则有 $k-l-1$ 项比 a_k 大，从而 $b_k=l-(k-l-1)=2l-k+1$.

同理，设排列 a'_1，a'_2，…，a'_n 中有 l' 项比 a'_k 小，则有 $k-l'-1$ 项比 a'_k 大，从而 $b'_k=2l'-k+1$.

因为 a_1，a_2，…，a_k 与 a'_1，a'_2，…，a'_k 是 k 个不同数的两个不同排列，且 $a_k\neq a'_k$，

所以 $l\neq l'$，从而 $b_k\neq b'_k$.

所以排列 a_1，a_2，…，a_n 和 a'_1，a'_2，…，a'_n 的生成列也不同.

（Ⅲ）证明：设排列 a_1，a_2，…，a_n 的生成列为 b_1，b_2，…，b_n，且 a_k 为 a_1，a_2，…，a_n 中从左至右第一个满意指数为负数的项，所以 $b_1 \geqslant 0$，$b_2 \geqslant 0$，…，$b_{k-1} \geqslant 0$，$b_k \leqslant -1$.

进行一次变换 τ 后，排列 a_1，a_2，…，a_n 变换为 a_k，a_1，a_2，…a_{k-1}，a_{k+1}，…，a_n，设该排列的生成列为 b'_1，b'_2，…，b'_n.

所以 （b'_1，b'_2，…，b'_n）－（$b_1+b_2+\cdots+b_n$）＝[g（a_1-a_k）+g（a_2-a_k）+…+g（$a_{k-1}-a_k$）]－[g（a_k-a_1）+g（a_k-a_2）+…+g（a_k-a_{k-1}）]＝－2[g（a_k-a_1）+g（a_k-a_2）+…+g（a_k-a_{k-1}）]＝－2b_k ≥2.

因此，经过一次变换 τ 后，整个排列的各项满意指数之和将至少增加 2.

因为 a_i 的满意指数 $b_i \leqslant i-1$，其中 $i=1$，2，3，…，n，

所以，整个排列的各项满意指数之和不超过 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$，

即整个排列的各项满意指数之和为有限数，

所以经过有限次变换 τ 后，一定会使各项的满意指数均为非负数.