2013 北京石景山高三二模

数　　学（理）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.（5 分）已知全集 U={0，1，2，3，4}，集合 A={0，1，2，3}，B={2，3，4}，那么 C_U（A∩B）（　　）

A．{0，1}　B．{2，3}　C．{0，1，4}　D．{0，1，2，3，4}

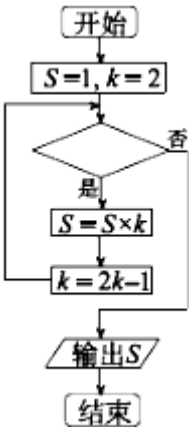
2.（5 分）在复平面内，复数 z_1 的对应点是 Z_1（1，1），z_2 的对应点是 Z_2（1，－1），则 $z_1 \cdot z_2$=（　　）

A．1　B．2　C．－i　D．i

3.（5 分）在极坐标系中，圆心为 $(1, \frac{\pi}{2})$，且过极点的圆的方程是（　　）

A．ρ=2sinθ　B．ρ=－2sinθ　C．ρ=2cosθ　D．ρ=－2cosθ

4.（5 分）如图所示的程序框图表示求算式“2×3×5×9×17”之值，则判断框内可以填入（　　）



A．k≤10　B．k≤16　C．k≤22　D．k≤34

5.（5 分）设 $a=2^{\frac{1}{2}}$，$b=3^{\frac{1}{3}}$，$c=\log_3 2$，则（　　）

A．b＜a＜c　B．a＜b＜c　C．c＜b＜a　D．c＜a＜b

6.（5 分）对于直线 m，n 和平面 α，β，使 m⊥α 成立的一个充分条件是（　　）

A．m⊥n，n∥α　B．m∥β，β⊥α　C．m⊥β，n⊥β，n⊥α　D．m⊥n，n⊥β，β⊥α

7.（5 分）已知正六边形 ABCDEF 的边长是 2，一条抛物线恰好经过该六边形的四个顶点，则抛物线的焦点到准线的距离是（　　）

A．$\frac{\sqrt{3}}{4}$　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　C．$\sqrt{3}$　D．$2\sqrt{3}$

8.（5 分）已知函数 f（x）=x－[x]，其中[x]表示不超过实数 x 的最大整数．若关于 x 的方程 f（x）=kx+k 有三个不同的实根，则实数 k 的取值范围是（　　）

A．$[-1, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$　B．$(-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{4}, \frac{1}{3})$

C．$[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{2}, 1]$　D．$(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, 1)$

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

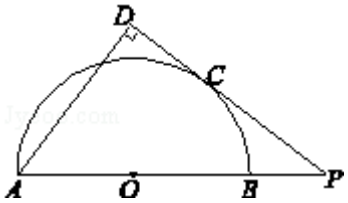
9.（5 分）如图是甲，乙两组各 6 名同学身高（单位：cm）数据的茎叶图．记甲，乙两组数据的平均数依次为$\overline{x}_{甲}$和$\overline{x}_{乙}$，则 $\overline{x}_{甲}$_____$\overline{x}_{乙}$．（填入：“＞”，“=”，或“＜”）

甲组		乙组
1 3	15	0
5 7	16	1 2 3 4
0 2	17	2

10.（5 分）$(2x-1)^5$的展开式中 x^3项的系数是_____.（用数字作答）

11.（5 分）在△ABC 中，BC=2，AC=$\sqrt{7}$，B=$\frac{\pi}{3}$，则 AB=_____；△ABC 的面积是_____.

12.（5 分）如图，AB 是半圆 O 的直径，P 在 AB 的延长线上，PD 与半圆 O 相切于点 C，AD⊥PD．若 PC=4，PB=2，则 CD=_____.



13.（5 分）在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=5$，$a_1+a_4=12$，则 a_n=_____；设$b_n=\frac{1}{a_n^2-1}$ $(n\in N^*)$，则数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n=_____.

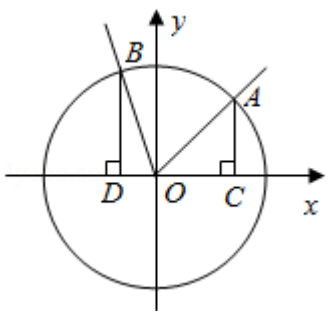
14.（5 分）已知正数 a，b，c 满足 a+b=ab，a+b+c=abc，则 c 的取值范围是_____.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

15.（13 分）如图，在直角坐标系 xOy 中，角 α 的顶点是原点，始边与 x 轴正半轴重合，终边交单位圆于点 A，且 $\alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$．将角 α 的终边按逆时针方向旋转$\frac{\pi}{3}$，交单位圆于点 B．记 A（$x_1$，$y_1$），B（$x_2$，$y_2$）.

（Ⅰ）若 $x_1=\frac{1}{3}$，求 x_2；

（Ⅱ）分别过 A，B 作 x 轴的垂线，垂足依次为 C，D．记△AOC 的面积为 S_1，△BOD 的面积为 S_2．若 $S_1=2S_2$，求角 α 的值.



16.（13 分）某超市在节日期间进行有奖促销，凡在该超市购物满 300 元的顾客，将获得一次摸奖机会，规则如下：

奖盒中放有除颜色外完全相同的 1 个红球，1 个黄球，1 个白球和 1 个黑球．顾客不放回的每次摸出 1 个球，若摸到黑球则停止摸奖，否则就要将奖盒中的球全部摸出才停止．规定摸到红球奖励 10 元，摸到白球或黄球奖励 5 元，摸到黑球不奖励．

（Ⅰ）求 1 名顾客摸球 3 次停止摸奖的概率；

（Ⅱ）记 X 为 1 名顾客摸奖获得的奖金数额，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

17．（14 分）如图 1，四棱锥 P－ABCD 中，PD⊥底面 ABCD，面 ABCD 是直角梯形，M 为侧棱 PD 上一点．该四棱锥的俯视图和侧（左）视图如图 2 所示．

（Ⅰ）证明：BC⊥平面 PBD；

（Ⅱ）证明：AM∥平面 PBC；

（Ⅲ）线段 CD 上是否存在点 N，使 AM 与 BN 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$？若存在，找到所有符合要求的点 N，并求 CN 的长；若不存在，说明理由．

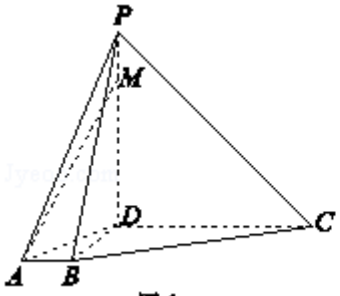


图 1

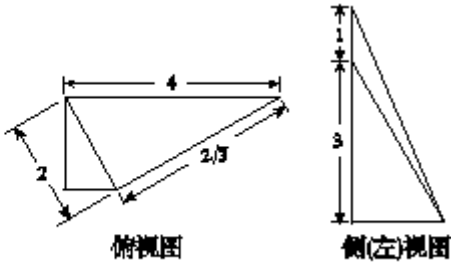
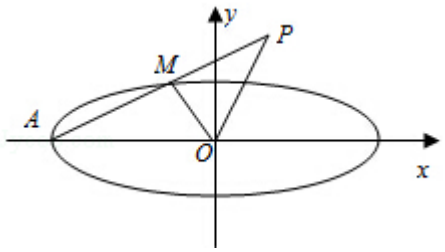


图 2

18．（13 分）如图所示，椭圆 C：$x^2+\frac{y^2}{m}=1$（0＜m＜1）的左顶点为 A，M 是椭圆 C 上异于点 A 的任意一点，点 P 与点 A 关于点 M 对称．

（Ⅰ）若点 P 的坐标为（$\frac{9}{5}$，$\frac{4\sqrt{3}}{5}$），求 m 的值；

（Ⅱ）若椭圆 C 上存在点 M，使得 OP⊥OM，求 m 的取值范围．



19．（14 分）已知函数$f(x)=\frac{2}{3}x^3-2x^2+(2-a)x+1$，其中 a∈R．

（Ⅰ）若 a=2，求曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线方程；

（Ⅱ）求 f（x）在区间[2，3]上的最大值和最小值．

20．（13 分）已知集合 $S_n=\{(x_1，x_2，…，x_n)|x_1，x_2，…，x_n$是正整数 1，2，3，…，n 的一个排列$\}$（n≥2），函数$g(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ -1, & x<0.\end{cases}$

对于（a_1，a_2，…a_n）$\in S_n$，定义：$b_i=g(a_i-a_1)+g(a_i-a_2)+\cdots+g(a_i-a_{i-1})$，$i\in\{2,3,\cdots,n\}$，$b_1=0$，称 b_i 为 a_i 的满意指数．排列 b_1，b_2，…，b_n 为排列 a_1，a_2，…，a_n 的生成列；排列 a_1，a_2，…，a_n 为排列 b_1，b_2，…，b_n 的母列．

（Ⅰ）当 n=6 时，写出排列 3，5，1，4，6，2 的生成列及排列 0，－1，2，－3，4，3 的母列；

（Ⅱ）证明：若 a_1，a_2，…，a_n 和 a'_1，a'_2，…，a'_n 为 S_n 中两个不同排列，则它们的生成列也不同；

（Ⅲ）对于 S_n 中的排列 a_1，a_2，…，a_n，定义变换 τ：将排列 a_1，a_2，…，a_n 从左至右第一个满意指数为负数的项调至首项，其它各项顺序不变，得到一个新的排列．证明：一定可以经过有限次变换 τ 将排列 a_1，a_2，…，a_n 变换为各项满意指数均为非负数的排列．

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

1.【解答】∵集合 A={0，1，2，3}，B={2，3，4}，

∴A∩B={2，3}，

又全集 U={0，1，2，3，4}，

则 C_U（A∩B）={0，1，4}．

故选：C．

2.【解答】∵在复平面内，复数 z_1的对应点是 Z_1（1，1），z_2的对应点是 Z_2（1，－1），

∴z_1=1+i，z_2=1－i，

∴$z_1 \cdot z_2$=（1+i）（1－i）=1^2-i^2=1+1=2．

故选 B．

3.【解答】∵在极坐标系中，圆心在 $(1, \frac{\pi}{2})$，且过极点的圆的直角坐标方程是：

x^2+（y－1）^{2}=1，即 $x^2+y^2-2y=0$，

它的极坐标方程为：ρ=2sinθ．

故选 A．

4.【解答】由题设条件可以看出，此程序是一个求几个数的连乘积的问题，

第一次乘入的数是 2，由于程序框图表示求算式“2×3×5×9×17”之值，

以后所乘的数依次为 3，5，9，17，

2×3×5×9×17 五个数的积故程序只需运行 5 次，运行 5 次后，k 值变为 33，

故判断框中应填 k＜33，或者 k≤22．

故选 C．

5.【解答】因为 $a=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}>1$，$b=3^{\frac{1}{3}}$，因为 a^6=8，b^6=9，所以 b＞a，

因为 $c=\log_3 2 \in$（0，1），所以 b＞a＞c．

故选 D．

6.【解答】A、“m⊥n，n∥α”，如正方体中 AB⊥BC，BC∥平面 A′ B′ C′ D′，但 AB 与平面 A′ B′ C′ D′ 不垂直，

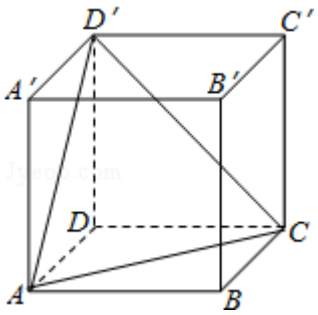
故推不出 m⊥α，故 A 不正确；

B、“m∥β，β⊥α”，如正方体中 A′C′∥面 ABCD，面 ABCD⊥面 BCC′B′，但 A′C′与平面 BCC′B′不垂直．推不出 m⊥α，故 B 不正确；

C、根据 m⊥β，n⊥β，得 m∥n，又 n⊥α，根据线面垂直的判定，可得 m⊥α，故 D 正确；

D、“m⊥n，n⊥β，β⊥α”，如正方体中 AD′⊥AB，AB⊥面 BCC′B′，面 ABCD⊥面 BCC′B′，但 AD′与面 BCC′B′不垂直，故推不出 m⊥α，故 D 不正确．

故选：C．



7.【解答】由题意，设正六边形 ABCDEF 的顶点 A、B、C、F 在抛物线 $y^2=2px$ 上，

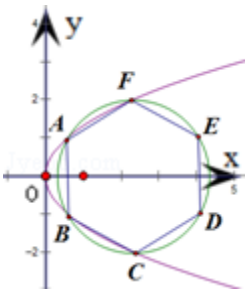
设 A（x_1，1），F（x_2，2），可得 $\begin{cases} x_1+\sqrt{3}=x_2 & ① \\ 2px_1=1 & ② \\ 2px_2=4 & ③ \end{cases}$，

由②、③消去 p 得 $x_2=4x_1$，代入①可得 $x_1+\sqrt{3}=4x_1$，

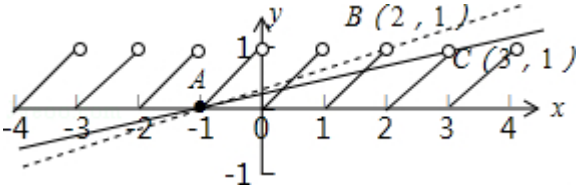
所以 $x_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$，代入②得 $2p=\sqrt{3}$，

根据抛物线的性质，可得焦点到准线的距离是 $p=\frac{\sqrt{3}}{2}$

故选：B



8.【解答】函数 f（x）=x－[x]的图象如下图所示：



y=kx+k 表示恒过 A（－1，0）点斜率为 k 的直线

若方程 f（x）=kx+k 有 3 个相异的实根.

则函数 f（x）=x－[x]与函数 f（x）=kx+k 的图象有且仅有 3 个交点

由图可得：

当 y=kx+k 过（2，1）点时，k=$\frac{1}{3}$，

当 y=kx+k 过（3，1）点时，k=$\frac{1}{4}$，

当 y=kx+k 过（－2，1）点时，k=－1，

当 y=kx+k 过（－3，1）点时，k=－$\frac{1}{2}$，

则实数 k 满足 $\frac{1}{4}\leqslant k<\frac{1}{3}$或－1＜k≤－$\frac{1}{2}$.

故选 B.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】由茎叶图，甲班平均身高为（151+153+165+167+170+172）÷6=163

乙班平均身高为（150+161+162+163+164+172）÷6=162＜163.

则 $\overline{x}_{甲}>\overline{x}_{乙}$.

故答案为：＞.

10.【解答】在（2x－1）^{5}的展开式中，通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot(2x)^{5-r}\cdot(-1)^r$，

令 5－r=3，求得 r=2，故（2x－1）^{5}的展开式中 x^3项的系数是 $C_5^2\cdot 2^3\cdot(-1)^2=80$，

故答案为 80.

11.【解答】∵在△ABC 中，BC=2，$AC=\sqrt{7}$，$B=\frac{\pi}{3}$，

∴由余弦定理，得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos\frac{\pi}{3}$，即 $7=AB^2+2^2-2\times2\times AB\cos\frac{\pi}{3}$，

化简整理得 $AB^2-2AB-3=0$，可得 AB=3（舍去－1）

根据正弦定理，得△ABC 的面积为

$S=\frac{1}{2}BC\cdot ABsinB=\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

故答案为：3，$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

12.【解答】设圆的半径为 R. 连接 OC.

∵PD 与半圆 O 相切于点 C，∴PC^2=PB•PA，OC⊥PD..

∵PC=4，PB=2，

∴4^2=2×（2+2R），

解得 R=3.

又∵AD⊥PD，∴OC∥AD.

∴$\frac{PC}{CD}=\frac{PO}{OA}$.

∴$\frac{4}{CD}=\frac{2+3}{3}$，解得 CD=$\frac{12}{5}$.

故答案为$\frac{12}{5}$.

13.【解答】设等差数列{a_n}的公差为 d，则由 a_2=5，a_1+a_4=12 可得 $\begin{cases}a_1+d=5\\2a_1+3d=12\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a_1=3\\d=2\end{cases}$，

故 a_n=3+（n﹣1）2=2n+1.

∵ $b_n=\frac{1}{a_n^2-1}=\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}]$，

∴数列{b_n}的前 n 项和 $S_n=\frac{1}{4}[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}]=\frac{1}{4}[1-\frac{1}{n+1}]=\frac{n}{4(n+1)}$，

故答案为 2n+1，$\frac{n}{4(n+1)}$.

14.【解答】∵正数 a，b，c 满足 a+b=ab，∴$ab\geqslant 2\sqrt{ab}$，化为$\sqrt{ab}(\sqrt{ab}-2)\geqslant 0$，

∴$\sqrt{ab}\geqslant 2$，∴ab≥4，当且仅当 a=b=2 时取等号，∴ab∈[4，+∞).

∵a+b+c=abc，∴ab+c=abc，∴c=$\frac{ab}{ab-1}=\frac{ab-1+1}{ab-1}=1+\frac{1}{ab-1}$.

∵ab≥4，∴$1<1+\frac{1}{ab-1}\leqslant\frac{4}{3}$，∴$1<1+\frac{1}{ab-1}\leqslant\frac{4}{3}$.

∴c 的取值范围是 $(1,\frac{4}{3}]$.

故答案为 $(1,\frac{4}{3}]$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

15.【解答】（Ⅰ）解：由三角函数定义，得 $x_1=\cos\alpha$，$x_2=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})$.

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2})$，$\cos\alpha=\frac{1}{3}$，所以 $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

所以 $x_2=\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\frac{1-2\sqrt{6}}{6}$.

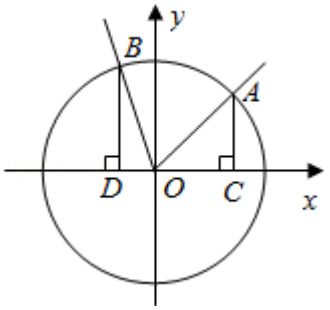
（Ⅱ）解：依题意得 $y_1=\sin\alpha$，$y_2=\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})$．所以 $S_1=\frac{1}{2}x_1y_1=\frac{1}{2}\cos\alpha\cdot\sin\alpha=\frac{1}{4}\sin2\alpha$，

$S_2=\frac{1}{2}|x_2|y_2=\frac{1}{2}[-\cos(\alpha+\frac{\pi}{3})]\cdot\sin(\alpha+\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{4}\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})$．

依题意 $S_1=2S_2$ 得 $\sin2\alpha=-2\sin(2\alpha+\frac{2\pi}{3})$，即 $\sin2\alpha=-2[\sin2\alpha\cos\frac{2\pi}{3}+\cos2\alpha\sin\frac{2\pi}{3}]=\sin2\alpha-\sqrt{3}\cos2\alpha$，

整理得 $\cos2\alpha=0$．

因为 $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，所以 $\frac{\pi}{3}<2\alpha<\pi$，所以 $2\alpha=\frac{\pi}{2}$，即 $\alpha=\frac{\pi}{4}$．



16.【解答】（Ⅰ）解：设“1 名顾客摸球 3 次停止摸奖”为事件 A，

则共有基本事件：$1+C_3^1\cdot C_1^1+C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1+C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1\cdot C_1^1=16$ 个，

则 A 事件包含基本事件的个数为 $C_3^1\cdot C_2^1\cdot C_1^1=6$ 个，

则 $P(A)=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$，

故 1 名顾客摸球 3 次停止摸奖的概率为 $\frac{3}{8}$，

（Ⅱ）解：随机变量 X 的所有取值为 0，5，10，15，20．

$P(X=0)=\frac{1}{4}$，$P(X=5)=\frac{A_2^2}{A_4^2}=\frac{1}{6}$，

$P(X=10)=\frac{1}{A_4^2}+\frac{A_2^2}{A_4^3}=\frac{1}{6}$，

$P(X=15)=\frac{C_2^1\cdot A_2^2}{A_4^3}=\frac{1}{6}$，

$P(X=20)=\frac{A_3^3}{A_4^4}=\frac{1}{4}$．

所以，随机变量 X 的分布列为：

X	0	5	10	15	20
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

$EX=0\times\frac{1}{4}+5\times\frac{1}{6}+10\times\frac{1}{6}+15\times\frac{1}{6}+20\times\frac{1}{4}=10$.

17.【解答】（Ⅰ）证明：由俯视图可得，$BD^2+BC^2=CD^2$，

∴BC⊥BD.

又∵PD⊥平面 ABCD，

∴BC⊥PD，

∵BD∩PD=D，

∴BC⊥平面 PBD.

（Ⅱ）证明：取 PC 上一点 Q，使 PQ：PC=1：4，连接 MQ，BQ.

由左视图知 PM：PD=1：4，∴MQ∥CD，$MQ=\frac{1}{4}CD$.

在△BCD 中，易得∠CDB=60°，∴∠ADB=30°.

又 BD=2，∴AB=1，$AD=\sqrt{3}$.

又∵AB∥CD，$AB=\frac{1}{4}CD$，

∴AB∥MQ，AB=MQ.

∴四边形 ABQM 为平行四边形，

∴AM∥BQ.

∵AM⊄平面 PBC，BQ⊂平面 PBC，

∴直线 AM∥平面 PBC.

（Ⅲ）解：线段 CD 上存在点 N，使 AM 与 BN 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$. 证明如下：

∵PD⊥平面 ABCD，DA⊥DC，建立如图所示的空间直角坐标系 D－xyz.

∴$D(0,\ 0,\ 0)$，$A(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$B(\sqrt{3},\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 4,\ 0)$，$M(0,\ 0,\ 3)$.

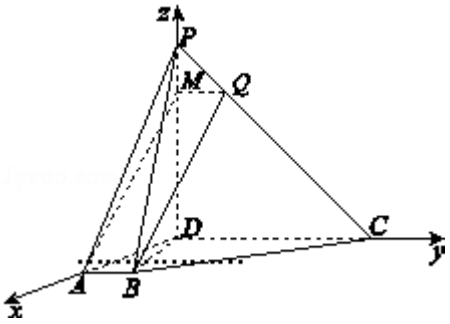
设 $D(0,\ 0,\ 0)$，$A(\sqrt{3},\ 0,\ 0)$，$B(\sqrt{3},\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 4,\ 0)$，$M(0,\ 0,\ 3)$，其中 N（0，t，0）.

∴$\overrightarrow{AM}=(-\sqrt{3},\ 0,\ 3)$，$\overrightarrow{BN}=(-\sqrt{3},\ t-1,\ 0)$.

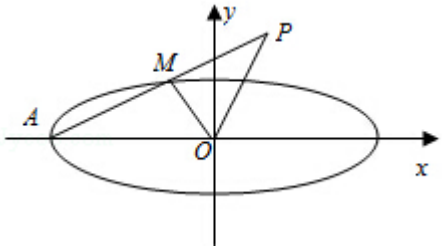
要使 AM 与 BN 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，则有 $\frac{|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{BN}|}{|\overrightarrow{AM}||\overrightarrow{BN}|}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，

∴$\frac{|3|}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+(t-1)^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$，解得 t=0 或 2，均适合 N（0，t，0）.

故点 N 位于 D 点处，此时 CN=4；或 CD 中点处，此时 CN=2，有 AM 与 BN 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$.



18.【解答】（Ⅰ）依题意，M 是线段 AP 的中点，



因为 A（－1，0），$P(\frac{9}{5},\frac{4\sqrt{3}}{5})$，

所以点 M 的坐标为 $(\frac{2}{5},\frac{2\sqrt{3}}{5})$.

由于点 M 在椭圆 C 上，

所以 $\frac{4}{25}+\frac{12}{25m}=1$，解得 $m=\frac{4}{7}$.

（Ⅱ）设 M（x_0，y_0）（$-1<x_0<1$），则 $x_0^2+\frac{y_0^2}{m}=1$，①

因为 M 是线段 AP 的中点，所以 P（$2x_0+1$，$2y_0$）.

因为 OP⊥OM，所以 $\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OM}$，

所以 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OM}=0$，即 $x_0(2x_0+1)+2y_0^2=0$. ②

由①，②消去 y_0，整理得 $m=\frac{2x_0^2+x_0}{2x_0^2-2}$.

所以 $m=1+\frac{1}{2(x_0+2)+\frac{6}{x_0+2}-8}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}$，

当且仅当 $x_0=-2+\sqrt{3}$时，上式等号成立.

所以 m 的取值范围是 $(0,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}]$.

19.【解答】（Ⅰ）解：f（x）的定义域为 R，且 f’（x）$=2x^2-4x+2-a$，当 a=2 时，$f(1)=-\frac{1}{3}$，f’（1）＝－2，

所以曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线方程为 $y+\frac{1}{3}=-2(x-1)$，即 6x+3y－5=0.（4 分）

（Ⅱ）解：方程 f’（x）=0 的判别式为△=（﹣4）^{2}﹣4×2×（2﹣a）=8a.

（ⅰ）当 a≤0 时，f’（x）≥0，所以 f（x）在区间（2，3）上单调递增，所以 f（x）在区间[2，3]

上的最小值是$f(2)=\frac{7}{3}-2a$；最大值是 f（3）=7﹣3a.

（ⅱ）当 a＞0 时，令 f’（x）=0，得 $x_1=1-\frac{\sqrt{2a}}{2}$，或$x_2=1+\frac{\sqrt{2a}}{2}$. f（x）和 f’（x）的情况如下：

x	（﹣∞，x_1）	x_1	（x_1，x_2）	x_2	（x_2，+∞）
f’（x）	+	0	-	0	+
f（x）	↗		↘		↗

故 f（x）的单调增区间为$(-\infty,\ 1-\frac{\sqrt{2a}}{2})$，$(1+\frac{\sqrt{2a}}{2},\ +\infty)$；单调减区间为$(1-\frac{\sqrt{2a}}{2},\ 1+\frac{\sqrt{2a}}{2})$.

①当 0＜a≤2 时，x_2≤2，此时 f（x）在区间（2，3）上单调递增，所以 f（x）在区间[2，3]

上的最小值是$f(2)=\frac{7}{3}-2a$；最大值是 f（3）=7﹣3a.

②当 2＜a＜8 时，x_1＜2＜x_2＜3，此时 f（x）在区间（2，x_2）上单调递减，在区间（x_2，3）上单调递增，

所以 f（x）在区间[2，3]上的最小值是 $f(x_2)=\frac{5}{3}-a-\frac{a\sqrt{2a}}{3}$.

因为 $f(3)-f(2)=\frac{14}{3}-a$，

所以 当$2<a\leqslant\frac{14}{3}$时，f（x）在区间[2，3]上的最大值是 f（3）=7﹣3a；当$\frac{14}{3}<a<8$时，f（x）在区间[2，3]

上的最大值是$f(2)=\frac{7}{3}-2a$.

③当 a≥8 时，x_1＜2＜3≤x_2，此时 f（x）在区间（2，3）上单调递减，

所以 f（x）在区间[2，3]上的最小值是 f（3）=7﹣3a；最大值是$f(2)=\frac{7}{3}-2a$.

综上可得，

当 a≤2 时，f（x）在区间[2，3]上的最小值是$\frac{7}{3}-2a$，最大值是 7﹣3a；

当$2<a\leqslant\frac{14}{3}$时，f（x）在区间[2，3]上的最小值是$\frac{5}{3}-a-\frac{a\sqrt{2a}}{3}$，最大值是 7﹣3a；

当$\frac{14}{3}<a<8$时，f（x）在区间[2，3]上的最小值是$\frac{5}{3}-a-\frac{a\sqrt{2a}}{3}$，最大值是$\frac{7}{3}-2a$；

当 a≥8 时，f（x）在区间[2，3]上的最小值是 7﹣3a，最大值是$\frac{7}{3}-2a$.

20.【解答】（Ⅰ）解：当 n=6 时，排列 3，5，1，4，6，2 的生成列为 0，1，﹣2，1，4，﹣3；

排列 0，﹣1，2，﹣3，4，3 的母列为 3，2，4，1，6，5.

（Ⅱ）证明：设 a_1，a_2，…，a_n的生成列是 b_1，b_2，…，b_n；a'_1，a'_2，…，a'_n的生成列是与 b'_1，b'_2，…，b'_n，

从右往左数，设排列 a_1，a_2，…，a_n与 a'_1，a'_2，…，a'_n第一个不同的项为 a_k与 a'_k，即：$a_n=a'_n$，$a_{n-1}=a'_{n-1}$，…，$a_{k+1}=a'_{k+1}$，$a_k\neq a'_k$.

显然 $b_n=b'_n$，$b_{n-1}=b'_{n-1}$，…，$b_{k+1}=b'_{k+1}$，下面证明：$b_k\neq b'_k$.

由满意指数的定义知，a_i的满意指数为排列 a_1，a_2，…，a_n中前 i－1 项中比 a_i小的项的个数减去比 a_i大的项的个数.

由于排列 a_1，a_2，…，a_n的前 k 项各不相同，设这 k 项中有 l 项比 a_k小，则有 k－l－1 项比 a_k大，从而 $b_k=l-(k-l-1)=2l-k+1$.

同理，设排列 a'_1，a'_2，…，a'_n中有 l′ 项比 a'_k小，则有 k－l′－1 项比 a'_k大，从而 $b'_k=2l'-k+1$.

因为 a_1，a_2，…，a_k与 a'_1，a'_2，…，a'_k是 k 个不同数的两个不同排列，且 $a_k\neq a'_k$，

所以 $l\neq l'$，从而 $b_k\neq b'_k$.

所以排列 a_1，a_2，…，a_n和 a'_1，a'_2，…，a'_n的生成列也不同.

（Ⅲ）证明：设排列 a_1，a_2，…，a_n的生成列为 b_1，b_2，…，b_n，且 a_k为 a_1，a_2，…，a_n中从左至右第一个满意指数为负数的项，所以 $b_1\geqslant 0$，$b_2\geqslant 0$，…，$b_{k-1}\geqslant 0$，$b_k\leqslant -1$.

进行一次变换 τ 后，排列 a_1，a_2，…，a_n变换为 a_k，a_1，a_2，…a_{k-1}，a_{k+1}，…，a_n，设该排列的生成列为 b'_1，b'_2，…，b'_n.

所以 $(b'_1,b'_2,\cdots,b'_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n)=[g(a_1-a_k)+g(a_2-a_k)+\cdots+g(a_{k-1}-a_k)]-[g(a_k-a_1)+g(a_k-a_2)+\cdots+g(a_k-a_{k-1})]=-2[g(a_k-a_1)+g(a_k-a_2)+\cdots+g(a_k-a_{k-1})]=-2b_k\geqslant 2$.

因此，经过一次变换 τ 后，整个排列的各项满意指数之和将至少增加 2.

因为 a_i的满意指数 $b_i\leqslant i-1$，其中 i=1，2，3，…，n，

所以，整个排列的各项满意指数之和不超过 $1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$，

即整个排列的各项满意指数之和为有限数，

所以经过有限次变换 τ 后，一定会使各项的满意指数均为非负数.