# 2013 北京海淀高三二模

# 数　　学（理）

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．**

1．（5 分）集合 A={x|（x－1）（x+2）≤0}，B={x|x＜0}，则 A∪B=（　　）

A．（－∞，0]　　B．（－∞，1]　　C．[1，2]　　D．[1，+∞）

2．（5 分）已知数列{$a_n$}是公比为 q 的等比数列，且 $a_1 \cdot a_3=4$，$a_4=8$，则 $a_1+q$ 的值为（　　）

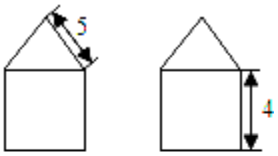
A．3　　B．2　　C．3 或－2　　D．3 或－3

3．（5 分）如图，在边长为 a 的正方形内有不规则图形 Ω．向正方形内随机撒豆子，若撒在图形 Ω 内和正方形内的豆子数分别为 m，n，则图形 Ω 面积的估计值为（　　）

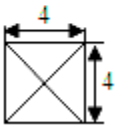



A．$\frac{ma}{n}$　　B．$\frac{na}{m}$　　C．$\frac{ma^2}{n}$　　D．$\frac{na^2}{m}$

4．（5 分）某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）




正视图　　侧视图




俯视图

A．180　　B．120　　C．276　　D．300

5．（5 分）在四边形 ABCD 中，“$\exists \lambda \in R$，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda \overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\lambda \overrightarrow{BC}$”是“四边形 ABCD 为平行四边形”的（　　）

A．充分而不必要条件　　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　　D．既不充分也不必要条件

6．（5 分）用数字 1，2，3，4，5 组成没有重复数字的五位数，且 5 不排在百位，2，4 都不排在个位和万位，则这样的五位数个数为（　　）

A．32　　B．36　　C．42　　D．48

7．（5 分）双曲线 C 的左右焦点分别为 $F_1$，$F_2$，且 $F_2$ 恰为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，设双曲线 C 与该抛物线的一个交点为 A，若△$AF_1F_2$ 是以 $AF_1$ 为底边的等腰三角形，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　　B．$1+\sqrt{2}$　　C．$1+\sqrt{3}$　　D．$2+\sqrt{3}$

8．（5 分）若数列{$a_n$}满足：存在正整数 T，对于任意正整数 n 都有 $a_{n+T}=a_n$ 成立，则称数列{$a_n$}为周期数列，周期为 T．已知数列{$a_n$}满足 $a_1=m$（$m>0$），$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-1, & a_n>1 \\ \frac{1}{a_n}, & 0<a_n\leqslant 1 \end{cases}$ 则下列结论中错误的是（　　）

A．若 $a_3=4$，则 m 可以取 3 个不同的值

B．若 $m=\sqrt{2}$，则数列$\{a_n\}$是周期为 3 的数列

C．$\forall T\in N^*$且 $T\geq 2$，存在 $m>1$，使得$\{a_n\}$是周期为 T 的数列

D．$\exists m\in Q$ 且 $m\geq 2$，使得数列$\{a_n\}$是周期数列

**二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.**

9．（5 分）在极坐标系中，极点到直线 $\rho\cos\theta=2$ 的距离为_____.

10．（5 分）已知 $a=\ln\frac{1}{2}$，$b=\sin\frac{1}{2}$，$c=2^{-\frac{1}{2}}$，则 a，b，c 按照从大到小排列为_____.

11．（5 分）直线 $l_1$过点（－2，0）且倾斜角为 30°，直线 $l_2$过点（2，0）且与直线 $l_1$垂直，则直线 $l_1$与直线 $l_2$的交点坐标为_____.

12．（5 分）在△ABC 中，∠A=30°，∠B=45°，$a=\sqrt{2}$，则 b=_____；$S_{\triangle ABC}$=_____.

13．（5 分）正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为 1，若动点 P 在线段 $BD_1$上运动，则$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AP}$的取值范围是_____.

14．（5 分）在平面直角坐标系中，动点 P（x，y）到两条坐标轴的距离之和等于它到点（1，1）的距离，记点 P 的轨迹为曲线为 W.

（Ⅰ）给出下列三个结论：

①曲线 W 关于原点对称；

②曲线 W 关于直线 y=x 对称；

③曲线 W 与 x 轴非负半轴，y 轴非负半轴围成的封闭图形的面积小于$\frac{1}{2}$；

其中，所有正确结论的序号是_____；

（Ⅱ）曲线 W 上的点到原点距离的最小值为_____.

**三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.**

15．（13 分）已知函数 $f(x)=1-\frac{\cos 2x}{\sqrt{2}\sin(x-\frac{\pi}{4})}$.

（Ⅰ）求函数 f（x）的定义域；

（Ⅱ）求函数 f（x）的单调增区间.

16．（13 分）福彩中心发行彩票的目的是为了获取资金资助福利事业，现在福彩中心准备发行一种面值为 5 元的福利彩票刮刮卡，设计方案如下：（1）该福利彩票中奖率为 50%；（2）每张中奖彩票的中奖奖金有 5 元，50 元和 150 元三种；（3）顾客购买一张彩票获得 150 元奖金的概率为 p，获得 50 元奖金的概率为 2%.

（Ⅰ）假设某顾客一次性花 10 元购买两张彩票，求其至少有一张彩票中奖的概率；

（Ⅱ）为了能够筹得资金资助福利事业，求 p 的取值范围.

17.（14 分）如图 1，在直角梯形 ABCD 中，∠ABC=∠DAB=90°，∠CAB=30°，BC=2，AD=4．把△DAC 沿对角线 AC 折起到△PAC 的位置，如图 2 所示，使得点 P 在平面 ABC 上的正投影 H 恰好落在线段 AC 上，连接 PB，点 E，F 分别为线段 PA，PB 的中点．

（Ⅰ）求证：平面 EFH∥平面 PBC；

（Ⅱ）求直线 HE 与平面 PHB 所成角的正弦值；

（Ⅲ）在棱 PA 上是否存在一点 M，使得 M 到 P，H，A，F 四点的距离相等？请说明理由．

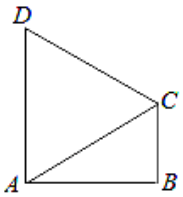



图1

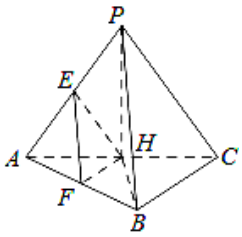



图2

18.（13 分）已知函数 f（x）=$e^x$，A（a，0）为一定点，直线 x=t（t≠0）分别与函数 f（x）的图象和 x 轴交于点 M，N，记△AMN 的面积为 S（t）．

（Ⅰ）当 a=0 时，求函数 S（t）的单调区间；

（Ⅱ）当 a＞2 时，若∃$t_0$∈[0，2]，使得 S（$t_0$）≥e，求 a 的取值范围．

19.（14 分）已知椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的四个顶点恰好是一边长为 2，一内角为 60°的菱形的四个顶点．

（1）求椭圆 M 的方程；

（2）直线 l 与椭圆 M 交于 A，B 两点，且线段 AB 的垂直平分线经过点（0，$\frac{1}{2}$），求△AOB（O 为坐标原点）面积的最大值．

20.（13 分）设 A 是由 m×n 个实数组成的 m 行 n 列的数表，如果某一行（或某一列）各数之和为负数，则改变该行（或该列）中所有数的符号，称为一次“操作”.

（Ⅰ） 数表 A 如表 1 所示，若经过两次“操作”，使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负实数，请写出每次“操作”后所得的数表（写出一种方法即可）；

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | -7 |
| -2 | 1 | 0 | 1 |

表 1

（Ⅱ） 数表 A 如表 2 所示，若必须经过两次“操作”，才可使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负整数，求整数 a 的所有可能值；

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | $a^2-1$ | -a | $-a^2$ |
| 2-a | $1-a^2$ | a-2 | $a^2$ |

表 2

（Ⅲ）对由 m×n 个实数组成的 m 行 n 列的任意一个数表 A，能否经过有限次“操作”以后，使得到的数表每行的各数之和与每列的各数之和均为非负整数？请说明理由.

# 参考答案

**一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．**

1.【解答】由 A={x|（x－1）（x+2）≤0}={x|－2≤x≤1}，B={x|x＜0}，

所以 A∪B={x|－2≤x≤1}∪{x|x＜0}=（－∞，1]．

故选 B．

2.【解答】在等比数列{$a_n$}中，由 $a_1 \cdot a_3=4$，$a_4=8$，得

$\begin{cases} a_1^2 q^2=4① \\ a_1 q^3=8② \end{cases}$，②$^2$÷①得：$q^4=16$，所以 $q=\pm 2$．

当 q=2 时，代入②得，$a_1=1$．

当 q=－2 时，代入②得，$a_1=-1$．

所以 $a_1+q$ 的值为 3 或－3．

故选 D．

3.【解答】∵由题意知在正方形中随机投掷 n 个点，若 n 个点中有 m 点落入 Ω 中，

∴不规则图形 Ω 的面积：正方形的面积=m：n

∴不规则图形 Ω 的面积=$\frac{m}{n}$×正方形的面积

=$\frac{m}{n} \times a^2$

=$\frac{ma^2}{n}$．

故选 C．

4.【解答】由题意可知几何体复原后，上部是四棱锥，下部是正方体，

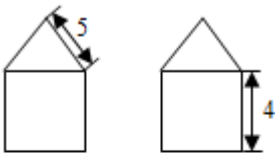
四棱锥的底面是边长为 4 的正方形，侧面斜高为 5；

下部是棱长为 4 的正方体，

所以几何体的表面积为：5 个正方形的面积加上棱锥的侧面积，

即：$5\times4\times4+4\times\frac{1}{2}\times4\times5\times4=120$．

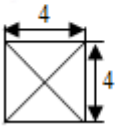
故选 B．



正视图



侧视图



俯视图

5.【解答】由在四边形 ABCD 中，“∃λ∈R，使得$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$”，得出 AB∥DC，AD∥BC，

得到四边形 ABCD 为平行四边形，

反之，由四边形 ABCD 为平行四边形，得到 AB=DC，AD=BC，从而有：∃λ=1∈R，使得 AB=λDC，AD=λBC，

故在四边形 ABCD 中，“∃λ∈R，使得 AB=λDC，AD=λBC”是“四边形 ABCD 为平行四边形”的必要而不充分条件.

故选 C.

6.【解答】由题意可知：2 和 4 需要排在十位、百位和千位.

若 2 排在百位，则 4 可以排在十位或千位，剩余的 1、3、5 可以随意排，

因此有 $2A_3^3$=12 种情况，

同理当 4 排在百位时，2 可以排在十位或千位，同样有 $2A_3^3$=12 种情况.

再考虑 2 和 4 分别排在十位和千位的情况，不同的排列有两种情况，

而此时由于 5 不能排在百位，因此只能从个位和万位中选一个，有两种情况，

最后剩余的 1 和 3 可以随意排列，因此共有 $2\times2\times A_2^2$=8 种情况.

因此所有的排法总数为 12+12+8=32 种.

故选 A

7.【解答】抛物线的焦点坐标（1，0），所以双曲线中，c=1，

又由已知得$|AF_2|=|F_1F_2|=2$，而抛物线准线为 x=﹣1，

根据抛物线的定义 A 点到准线的距离$=|AF_2|=2$，

因此 A 点坐标为（1，2），由此可知是$\triangle AF_1F_2$是以 $AF_1$ 为斜边的等腰直角三角形，

因为双曲线 C 与该抛物线的一个交点为 A，若$\triangle AF_1F_2$是以 $AF_1$ 为底边的等腰三角形，

所以双曲线的离心率 $e=\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|AF_1-AF_2|}=\frac{2}{2\sqrt{2}-2}=\sqrt{2}+1$.

故选 B.

8.【解答】对于选项 A，因为 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, & a_n>1\\ \frac{1}{a_n}, & 0<a_n\leqslant 1\end{cases}$，

所以 $\begin{cases}a_2>1\\ a_3=a_2-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<a_2\leqslant 1\\ a_3=\frac{1}{a_2}\end{cases}$，

因为 $a_3=4$，所以 $a_2=5$ 或 $a_2=\frac{1}{4}$，

又因为 $\begin{cases}a_1>1\\ a_2=a_1-1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}0<a_1\leqslant 1\\ a_2=\frac{1}{a_1}\end{cases}$，$a_1=m$，所以 $m=6$ 或 $m=\frac{5}{4}$ 或 $m=\frac{1}{5}$，所以选项 A 正确；

对于选项 B，$m=\sqrt{2}>1$，所以 $a_2=\sqrt{2}-1<1$；所以 $a_3=\frac{1}{a_2}=\sqrt{2}+1>1$，所以 $a_4=a_3-1=\sqrt{2}$，

所以数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的数列，所以选项 B 正确；

对于选项 C，当 B 可知当 $m=\sqrt{2}>1$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列，所以 C 正确.

故错误的是 D.

故选 D.

**二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.**

9.【解答】直线 $\rho\cos\theta=2$ 即 $x=2$，极点的直角坐标为（0，0），故极点到直线 $\rho\cos\theta=2$ 的距离为 2，

故答案为 2.

10.【解答】∵$a=\ln\frac{1}{2}<\ln 1=0$，

$0<b=\sin\frac{1}{2}\approx\sin\frac{57°\ 18'}{2}<\sin 30°=\frac{1}{2}$，

$c=2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}$，

∴$c>b>a$.

故答案为：$c>b>a$.

11.【解答】由题意可得直线 $l_1$ 的斜率等于 $\tan 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}$，由点斜式求得它的方程为 $y-0=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$，

即 $\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}=0$.

直线 $l_2$ 过的斜率等于 $\frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\sqrt{3}$，由点斜式求得它的方程为 $y-0=-\sqrt{3}(x-2)$，

即 $\sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0$.

由 $\begin{cases}\sqrt{3}x-3y+2\sqrt{3}=0\\ \sqrt{3}x+y-2\sqrt{3}=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\ y=\sqrt{3}\end{cases}$，故直线 $l_1$ 与直线 $l_2$ 的交点坐标为 $(1,\sqrt{3})$，

故答案为 $(1,\sqrt{3})$.

12.【解答】∵△ABC 中，∠A=30°，∠B=45°，$a=\sqrt{2}$，

∴由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，得 $b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{2}\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ}=2$

∵∠C=180°－∠A－∠B=75°

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2\times\sin 75^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

故答案为：2，$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

13.【解答】以 $\overrightarrow{DA}$ 所在的直线为 x 轴，以 $\overrightarrow{DC}$ 所在的直线为 y 轴，以 $\overrightarrow{DD_1}$ 所在的直线为 z 轴，建立空间直角坐标系.

则 D（0，0，0）、C（0，1，0）、A（1，0，0）、B（1，1，0）、$D_1$（0，0，1）.

∴$\overrightarrow{DC}$=（0，1，0）、$\overrightarrow{BD_1}$（－1，－1，1）.

∵点 P 在线段 $BD_1$ 上运动，∴$\overrightarrow{BP}=\lambda\cdot\overrightarrow{BD_1}$=（－λ，－λ，λ），且 0≤λ≤1.

∴$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BP}$=（－λ，1－λ，λ），

∴$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AP}=1-\lambda\in[0,1]$，

故答案为[0，1].

14.【解答】∵动点 P（x，y）到两条坐标轴的距离之和等于它到点（1，1）的距离，

∴$|x|+|y|=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$

∴|xy|+x+y－1=0

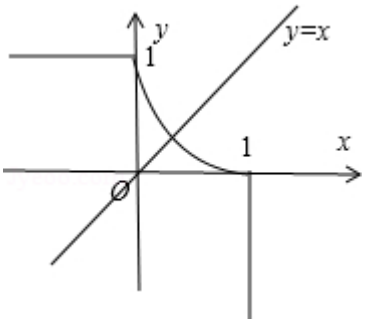
∴xy＞0，（x+1）（y+1）=2 或 xy＜0，（y－1）（1－x）=0

函数的图象如图所示

∴曲线 W 关于直线 y=x 对称；曲线 W 与 x 轴非负半轴，y 轴非负半轴围成的封闭图形的面积小于 $\frac{1}{2}$；

由 y=x 与（x+1）（y+1）=2 联立可得 $x=\sqrt{2}-1$，∴曲线 W 上的点到原点距离的最小值为 $\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$

故答案为：②③；$2-\sqrt{2}$




**三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．**

15.【解答】（I）∵sin（$x-\frac{\pi}{4}$）≠0，

∴$x-\frac{\pi}{4}\neq k\pi$，k∈Z，

则函数的定义域为$\{x|x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$，k∈Z}；

（II）∵f（x）=1－$\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin x-\cos x}$=1+（cosx+sinx）=1+sinx+cosx=1+$\sqrt{2}$sin（$x+\frac{\pi}{4}$），

又∵y=sinx 的单调递增区间为（$2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$2k\pi+\frac{\pi}{2}$），k∈Z，

令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}<x+\frac{\pi}{4}<2k\pi+\frac{\pi}{2}$，

解得：$2k\pi-\frac{3\pi}{4}<x<2k\pi+\frac{\pi}{4}$，

又注意到 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{4}$，

则 f（x）的单调递增区间为（$2k\pi-\frac{3\pi}{4}$，$2k\pi+\frac{\pi}{4}$），k∈Z.

16.【解答】（I）设至少一张中奖为事件 A，则 P（A）=1－$0.5^2$=0.75…（4 分）

（II）设福彩中心卖出一张彩票可能获得的资金为 ξ，则 ξ 可以取 5，0，－45，－145…（6 分）

故 ξ 的分布列为

| ξ | 5 | 0 | －45 | －145 |
|---|---|---|---|---|
| P | 50% | 50%－2%－p | 2% | p |

…（8 分）

所以 ξ 的期望为 Eξ=5×50%+0×（50%－2%－p）+（－45）×2%+（－145）×p=2.5－90%－145p…（11 分）

所以当 1.6－145p＞0 时，即 $p<\frac{8}{725}$…（12 分）

所以当 $0<p<\frac{8}{725}$ 时，福彩中心可以获取资金资助福利事业…（13 分）

17.【解答】（Ⅰ）∵点 P 在平面 ABC 上的正投影 H 恰好落在线段 AC 上，

所以 PH⊥平面 ABC，所以 PH⊥AC，

∵在直角梯形 ABCD 中，∠ABC=∠DAB=90°，∠CAB=30°，BC=2，AD=4，

∴AC=4，∠CAB=60°，

∴△ADC 是等边三角形，故 H 是 AC 的中点，

∴HE∥PC

同理可证 EF∥PB，

又 HE∩EF=E，CP∩PB=P，

∴平面 EFH∥平面 PBC；

（Ⅱ）在平面 ABC 内过 H 作 AC 的垂线，如图建立空间直角坐标系，则 A（0，－2，0），P（0，0，$2\sqrt{3}$），B（$\sqrt{3}$，1，0）

因为 E（0，－1，$\sqrt{3}$），$\overrightarrow{HE}$=（0，－1，$\sqrt{3}$），设平面 PHB 的法向量$\vec{n}$=（x，y，z），

∵$\overrightarrow{HB}$=（$\sqrt{3}$，1，0），$\overrightarrow{HP}$=（0，0，$2\sqrt{3}$），

∴$\begin{cases}\overrightarrow{HB}\cdot\vec{n}=0\\ \overrightarrow{HP}\cdot\vec{n}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0\\ z=0\end{cases}$，

令 x=$\sqrt{3}$，则 y=－3，

∴$\vec{n}$=（$\sqrt{3}$，－3，0）…8 分

$\cos<\vec{n},\overrightarrow{HE}>=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{HE}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{HE}|}=\frac{3}{2\times2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

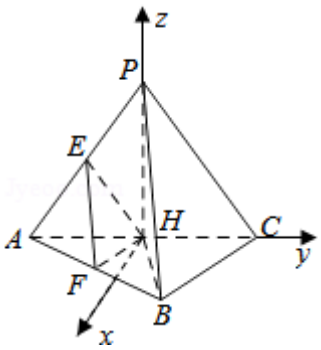
∴直线 HE 与平面 PHB 所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{3}}{4}$

（Ⅲ）存在，事实上记点 E 为 M 即可

因为在直角三角形 PHA 中，EH=PE=EA=$\frac{1}{2}$PA=2

在直角△PHB 中，PB=4，EF=$\frac{1}{2}$PB=2，

所以点 E 到 P，H，A，F 四点的距离相等



18.【解答】（I） 因为$S(t)=\frac{1}{2}|t-a|e^t$，其中 t≠a…（2 分）

当 a=0，$S(t)=\frac{1}{2}|t|e^t$，其中 t≠0

当 t＞0 时，$S(t)=\frac{1}{2}te^t$，$S'(t)=\frac{1}{2}(t+1)e^t$，

所以 S’（t）＞0，所以 S（t）在（0，+∞）上递增，…（4 分）

当 t＜0 时，$S(t)=-\frac{1}{2}te^t$，$S'(t)=-\frac{1}{2}(t+1)e^t$，

令$S'(t)=-\frac{1}{2}(t+1)e^t>0$，解得 t＜－1，所以 S（t）在（－∞，－1）上递增

令$S'(t)=-\frac{1}{2}(t+1)e^t<0$，解得 t＞－1，所以 S（t）在（－1，0）上递减 …（7 分）

综上，S（t）的单调递增区间为（0，+∞），（－∞，－1），S（t）的单调递增区间为（－1，0）

（II）因为$S(t)=\frac{1}{2}|t-a|e^t$，其中 t≠a

当 a＞2，t∈[0，2]时，$S(t)=\frac{1}{2}(a-t)e^t$

因为∃$t_0$∈[0，2]，使得 S（$t_0$）≥e，所以 S（t）在[0，2]上的最大值一定大于等于 e，

$S'(t)=-\frac{1}{2}[t-(a-1)]e^t$，令 S’（t）=0，得 t=a－1…（8 分）

当 a－1≥2 时，即 a≥3 时$S'(t)=-\frac{1}{2}[t-(a-1)]e^t>0$对 t∈（0，2）成立，S（t）单调递增，

所以当 t=2 时，S（t）取得最大值$S(2)=\frac{1}{2}(a-2)e^2$

令$\frac{1}{2}(a-2)e^2\geqslant e$，解得 $a\geqslant\frac{2}{e}+2$，

所以 a≥3…（10 分）

当 a－1＜2 时，即 a＜3 时$S'(t)=-\frac{1}{2}[t-(a-1)]e^t>0$对 t∈（0，a－1）成立，S（t）单调递增，

$S'(t)=-\frac{1}{2}[t-(a-1)]e^t<0$对 t∈（a－1，2）成立，S（t）单调递减，

所以当 t=a－1 时，S（t）取得最大值$S(a-1)=\frac{1}{2}e^{a-1}$，

令$S(a-1)=\frac{1}{2}e^{a-1}\geqslant e$，解得 a≥ln2+2，

所以 ln2+2≤a＜3…（12 分）

综上所述，ln2+2≤a…（13 分）

19.【解答】（1）∵椭圆 M：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的四个顶点恰好是一边长为 2，一内角为 60°的菱形的四个顶点，

∴四边形 ABCD 是菱形，且|AB|=2，∠ABC=60°，

∴△AOB 为直角三角形，|OA|=1，

根据勾股定理得：|OB|=$\sqrt{2^2-1^2}$=$\sqrt{3}$，

∴a=$\sqrt{3}$，b=1，

则椭圆方程为$\frac{x^2}{3}$+$y^2$=1；

（2）设 A（$x_1$，$y_1$），B（$x_2$，$y_2$），

∵线段 AB 的垂直平分线经过点（0，$\frac{1}{2}$），

∴直线 AB 斜率存在，

当直线 AB 斜率为 0 时，线段 AB 的垂直平分线是 y 轴，则有 $x_1$=﹣$x_2$，$y_1$=$y_2$，

∴$S_{△AOB}$=$\frac{1}{2}$•|2$x_1$|•|$y_1$|=|$x_1$|•|$y_1$|=|$x_1$|•$\sqrt{1-\frac{x_1^2}{3}}$=$\sqrt{x_1^2(1-\frac{x_1^2}{3})}$=$\sqrt{\frac{1}{3}x_1^2(3-x_1^2)}$，

∵$\sqrt{x_1^2(3-x_1^2)}$≤$\frac{x_1^2+3-x_1^2}{2}$=$\frac{3}{2}$，

∴$S_{△AOB}$≤$\frac{\sqrt{3}}{2}$，当且仅当|$x_1$|=$\frac{\sqrt{6}}{2}$时，$S_{△AOB}$的最大值是$\frac{\sqrt{3}}{2}$；

当直线 AB 的斜率不为 0 时，设直线 AB 为 y=kx+t，

联立得：$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1\\ y=kx+t\end{cases}$，

消去 y 得：（$3k^2$+1）$x^2$+6ktx+$3t^2$﹣3=0，

当△=4（$9k^2$+3﹣$3t^2$）＞0，即 $3k^2$+1＞$t^2$①，方程有两个不相等的实数根，

根据根与系数的关系得：$x_1$+$x_2$=﹣$\frac{6kt}{3k^2+1}$，即$\frac{1}{2}$（$x_1$+$x_2$）=﹣$\frac{3kt}{3k^2+1}$，

∴$\frac{1}{2}$（$y_1$+$y_2$）=$\frac{t}{3k^2+1}$，

∵$\frac{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{1}{2}}{0-\frac{x_1+x_2}{2}}$=$\frac{1}{k}$，

∴$3k^2$+1=4t②，

代入①得：4t＞$t^2$，

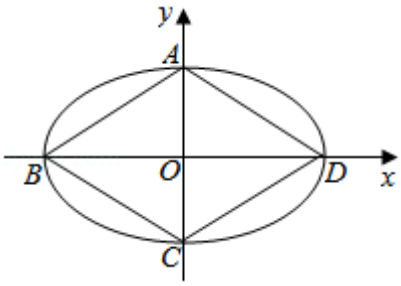
解得：0＜t＜4，

∵原点到直线 AB 的距离 d=$\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}$，|AB|=$\sqrt{1+k^2}$|$x_1$﹣$x_2$|=$\sqrt{1+k^2}$•$\frac{\sqrt{4(9k^2+3-3t^2)}}{3k^2+1}$，

$\therefore S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot d=\frac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{\sqrt{4(9k^2+3-3t^2)}}{3k^2+1}\cdot\frac{|t|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{1}{4}\sqrt{3(4t-t^2)}$,

$\because 0<t<4$，$\therefore$当 t=2，即 $k=\pm\sqrt{\frac{7}{3}}$时，$S_{\triangle AOB}$取得最大值$\frac{\sqrt{3}}{2}$，

综上，$S_{\triangle AOB}$的最大值是$\frac{\sqrt{3}}{2}$.




20.【解答】（I）

法 1：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | - 7 |
| - 2 | 1 | 0 | 1 |

改变第 4 列得：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 7 |
| - 2 | 1 | 0 | - 1 |

改变第 2 行得：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 7 |
| 2 | - 1 | 0 | 1 |

法 2：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | - 7 |
| - 2 | 1 | 0 | 1 |

改变第 2 行得：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 7 |
| 2 | - 1 | 0 | - 1 |

改变第 4 列得：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 7 |
| 2 | - 1 | 0 | 1 |

法 3：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | - 7 |
| - 2 | 1 | 0 | 1 |

改变第 1 列得：

| | | | |
|---|---|---|---|
| - 1 | 2 | 3 | 7 |
| 2 | 1 | 0 | - 1 |

改变第 4 列得：

| | | | |
|---|---|---|---|
| - 1 | 2 | 3 | 7 |
| 2 | 1 | 0 | - 1 |

（写出一种即可） …（3 分）

（II） 每一列所有数之和分别为 2，0，- 2，0，每一行所有数之和分别为 - 1，1；

①如果操作第三列，则

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | $a^2 - 1$ | a | $- a^2$ |
| 2 - a | $1 - a^2$ | - a+2 | $a^2$ |

则第一行之和为 2a - 1，第二行之和为 5 - 2a，

$\begin{cases} 2a-1 \geqslant 0 \\ 5-2a \geqslant 0 \end{cases}$，解得 a=1，a=2. …（6 分）

②如果操作第一行

| | | | |
|---|---|---|---|
| - a | $-\frac{}{a^2+1}$ | a | $a^2$ |
| 2 - a | $1 - a^2$ | a - 2 | $a^2$ |

则每一列之和分别为 $2 - 2a$，$2 - 2a^2$，$2a - 2$，$2a^2$

解得 a=1 …（9 分）

综上 a=1 …（10 分）

（III） 证明：按要求对某行（或某列）操作一次时，则该行的行和（或该列的列和）

由负整数变为正整数，都会引起该行的行和（或该列的列和）增大，

从而也就使得数阵中 mn 个数之和增加，且增加的幅度大于等于 1 - （ - 1）=2，

但是每次操作都只是改变数表中某行（或某列）各数的符号，而不改变其绝对值，

显然，数表中 mn 个数之和必然小于等于$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，

可见其增加的趋势必在有限次之后终止，终止之时必然所有的行和与所有的列和均为非负整数，故结论成立 …（13 分）