2013 北京海淀高三二模

数　　学（文）

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1.（5 分）集合 A={x|（x－1）（x+2）≤0}，B={x|x＜0}，则 A∪B=（　　）

A.（－∞，0]　　B.（－∞，1]　　C.［1，2］　　D.［1，+∞）

2.（5 分）已知 $a=\ln\frac{1}{2}$，$b=\sin\frac{1}{2}$，$c=2^{-\frac{1}{2}}$，则 a，b，c 的大小关系为（　　）

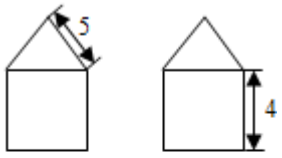
A．a＜b＜c　B．a＜c＜b　C．b＜a＜c　D．b＜c＜a

3.（5 分）如图，在边长为 a 的正方形内有不规则图形 Ω．向正方形内随机撒豆子，若撒在图形 Ω 内和正方形内的豆子数分别为 m，n，则图形 Ω 面积的估计值为（　　）

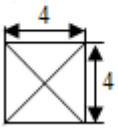


A．$\frac{ma}{n}$　B．$\frac{na}{m}$　C．$\frac{ma^2}{n}$　D．$\frac{na^2}{m}$

4.（5 分）某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）



正视图　　侧视图



俯视图

A．180　B．120　C．276　D．300

5.（5 分）下列函数中，为偶函数且有最小值的是（　　）

A．f（x）=x^2+x　B．f（x）=|lnx|　C．f（x）=xsinx　D．f（x）=e^x+e^{-x}

6.（5 分）在四边形 ABCD 中，“∃λ∈R，使得 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}=\lambda\overrightarrow{BC}$”是“四边形 ABCD 为平行四边形”的（　　）

A．充分而不必要条件　B．必要而不充分条件

C．充分必要条件　D．既不充分也不必要条件

7.（5 分）双曲线 C 的左右焦点分别为 F_1，F_2，且 F_2 恰为抛物线 $y^2=4x$ 的焦点，设双曲线 C 与该抛物线的一个交点为 A，若△AF_1F_2 是以 AF_1 为底边的等腰三角形，则双曲线 C 的离心率为（　　）

A．$\sqrt{2}$　B．$1+\sqrt{2}$　C．$1+\sqrt{3}$　D．$2+\sqrt{3}$

8.（5 分）若数列{a_n}满足：存在正整数 T，对于任意正整数 n 都有 $a_{n+T}=a_n$ 成立，则称数列{a_n}为周期数列，周期为

T．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=m$（$m>0$），$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, & a_n>1,\\ \frac{1}{a_n}, & 0<a_n\leqslant 1\end{cases}$则下列结论中错误的是（　　）

A．若$m=\frac{4}{5}$，则$a_5=3$

B．若$a_3=2$，则m可以取3个不同的值

C．若$m=\sqrt{2}$，则数列$\{a_n\}$是周期为3的数列

D．$\exists m\in Q$且$m\geq 2$，数列$\{a_n\}$是周期数列

二、填空题：本大题共6小题，每小题5分，共30分.

9．（5分）复数$\frac{2i}{1-i}$=_____.

10．（5分）甲、乙两名运动员在8场篮球比赛中得分的数据统计如图，则甲乙两人发挥较为稳定的是_____.

甲		乙
9	0	
9 8 5	1	6 7
6 3	2	2 3 3 5 7
8 6	3	1

11．（5分）已知数列$\{a_n\}$是等比数列，且a_1．$a_3=4$，$a_4=8$，a_3的值为_____.

12．（5分）直线$y=x+1$被圆$x^2-2x+y^2-3=0$所截得的弦长为_____.

13．（5分）已知函数$f(x)=\sin(2\omega x-\frac{\pi}{6})$（$0<\omega<1$）在区间$[0,\ \pi]$上的单调递增区间为_____.

14．（5分）设变量x，y满足约束条件$\begin{cases}y-1\geqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\\ y-1\leqslant k(x-1)\end{cases}$　其中$k\in R$，$k>0$

（Ⅰ）当k=1时，$\frac{y}{x^2}$的最大值为_____；

（Ⅱ）若$\frac{y}{x^2}$的最大值为1，则实数k的取值范围是_____.

三、解答题：本大题共6小题，共80分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15．（13分）已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n

（I）若$a_1=1$，$S_{10}=100$，求$\{a_n\}$的通项公式；

（II）若$S_n=n^2-6n$，解关于n的不等式$S_n+a_n>2n$.

16.（13 分）已知点 D 为△ABC 的边 BC 上一点．且 BD=2DC，∠ADB=75°，∠ACB=30°，AD=$\sqrt{2}$.

（I）求 CD 的长；

（II）求△ABC 的面积.

17.（14 分）如图 1，在直角梯形 ABCD 中，AD∥BC，∠ADC=90°，BA=BC 把△BAC 沿 AC 折起到△PAC 的位置，使得点 P 在平面 ADC 上的正投影 O 恰好落在线段 AC 上，如图 2 所示，点 E，F 分别为线段 PC，CD 的中点.

（I） 求证：平面 OEF∥平面 APD；

（II）求直线 CD⊥与平面 POF

（III）在棱 PC 上是否存在一点 M，使得 M 到点 P，O，C，F 四点的距离相等？请说明理由.

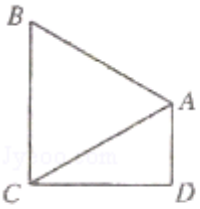


图 1

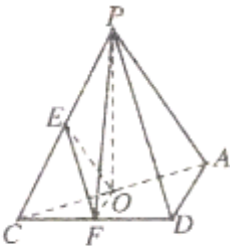


图 2

18.（13 分）已知函数 f（x）=lnx，g（x）=-$\frac{a}{x}$（a＞0）

（Ⅰ）当 a=1 时，若曲线 y=f（x）在点 M（x_0，f（x_0））处的切线与曲线 y=g（x）在点 P （x_0，g（x_0））处的切线平行，求实数 x_0的值；

（Ⅱ）若∀x∈（0，e]，都有 f（x）≥g（x）+$\frac{3}{2}$，求实数 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题（共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分）

1.【解答】因为集合 A={x|（x﹣1）（x+2）≤0}={x|1≥x≥﹣2}，

所以 B={x|x＜0}

所以 A∪B={x|x≤1}，

故选 B.

2.【解答】因为 a=ln$\frac{1}{2}$＜0，b=sin$\frac{1}{2}$$\in(0,\frac{1}{2})$，c=$2^{-\frac{1}{2}}$=$\frac{\sqrt{2}}{2}$＞$\frac{1}{2}$，

所以 a＜b＜c，

故选 A.

3.【解答】∵由题意知在正方形中随机投掷 n 个点，若 n 个点中有 m 点落入 Ω 中，

∴不规则图形 Ω 的面积：正方形的面积=m：n

∴不规则图形 Ω 的面积=$\frac{m}{n}$×正方形的面积

=$\frac{m}{n}\times a^2$

=$\frac{ma^2}{n}$.

故选 C.

4.【解答】由题意可知几何体复原后，上部是四棱锥，下部是正方体，

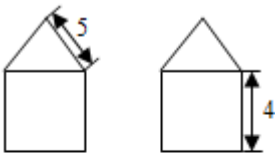
四棱锥的底面是边长为 4 的正方形，侧面斜高为 5；

下部是棱长为 4 的正方体，

所以几何体的表面积为：5 个正方形的面积加上棱锥的侧面积，

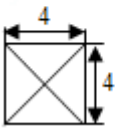
即：5×4×4+4×$\frac{1}{2}\times4\times5$×4=120.

故选 B.



正视图

侧视图



俯视图

5.【解答】f（x）=x^2+x 为非奇非偶函数，故排除 A；

f（x）=|lnx|为非奇非偶函数，归排除 B；

f（x）=xsinx 是偶函数，但没有最小值，故排除 C；

f（－x）=e^{-x}+e^{x}=f（x），所以 f（x）是偶函数，

又 f（x）=$e^{x}+e^{-x}\geqslant 2\sqrt{e^{x}\cdot e^{-x}}$=2，当且仅当 x=0 时 f（x）取得最小值，

故选 D.

6.【解答】由在四边形 ABCD 中，“∃λ∈R，使得$\overrightarrow{AB}$=λ$\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{AD}$=λ$\overrightarrow{BC}$”，得出 AB∥DC，AD∥BC，

得到四边形 ABCD 为平行四边形，

反之，由四边形 ABCD 为平行四边形，得到 AB=DC，AD=BC，从而有：∃λ=1∈R，使得 AB=λDC，AD=λBC，

故在四边形 ABCD 中，“∃λ∈R，使得 AB=λDC，AD=λBC”是“四边形 ABCD 为平行四边形”的必要而不充分条件.

故选 C.

7.【解答】抛物线的焦点坐标（1，0），所以双曲线中，c=1，

又由已知得|AF_2|=|F_1F_2|=2，而抛物线准线为 x=－1，

根据抛物线的定义 A 点到准线的距离=|AF_2|=2，

因此 A 点坐标为（1，2），由此可知是△AF_1F_2是以 AF_1为斜边的等腰直角三角形，

因为双曲线 C 与该抛物线的一个交点为 A，若△AF_1F_2是以 AF_1为底边的等腰三角形，

所以双曲线的离心率 e=$\frac{c}{a}=\frac{2c}{2a}=\frac{|F_1F_2|}{|AF_1-AF_2|}=\frac{2}{2\sqrt{2}-2}=\sqrt{2}+1$.

故选 B.

8.【解答】由 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1, & a_n>1\\ \frac{1}{a_n}, & 0<a_n\leqslant 1\end{cases}$，且 $a_1=m=\frac{4}{5}<1$，

所以，$a_2=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{\frac{4}{5}}=\frac{5}{4}>1$，$a_3=a_2-1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}<1$，

$a_4=\frac{1}{a_3}=\frac{1}{\frac{1}{4}}=4>1$，$a_5=a_4-1=4-1=3$.

故选项 A 正确；

由 $a_3=2$，若 $a_3=a_2-1=2$，则 $a_2=3$，若 $a_1-1=3$，则 $a_1=4$.

若 $\frac{1}{a_1}=3$，则 $a_1=\frac{1}{3}$.

由 $a_3=2$，若 $a_3=\frac{1}{a_2}=2$，则 $a_2=\frac{1}{2}$，若 $a_1-1=\frac{1}{2}$，则 $a_1=\frac{3}{2}$.

若 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$，则 $a_1=2$，不合题意.

所以，$a_3=2$ 时，m 即 a_1 的不同取值由 3 个.

故选项 B 正确；

若 $a_1=m=\sqrt{2}>1$，则 $a_2=a_1-1=\sqrt{2}-1<1$，

$a_3=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}+1>1$，

所以 $a_4=a_3-1=\sqrt{2}+1-1=\sqrt{2}$.

故在 $m=\sqrt{2}$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是周期为 3 的周期数列，选项 C 正确；

选项 A、B、C 均正确，不正确的选项即可排除 A、B、C，由选择题的特点可知，不正确的选项是 D.

故选 D.

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】复数 $\frac{2i}{1-i}=\frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)}=-1+i$

故答案为：$-1+i$.

10.【解答】由茎叶图可知：

乙运动员的得分大部分集中在 22～27 分之间，而甲运动员的得分相对比较散

故乙运动员的成绩发挥比较稳定.

故答案为：乙.

11.【解答】设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，∵a_1．$a_3=4$，$a_4=8$，∴$\begin{cases}a_1\cdot a_1q^2=4\\a_1q^3=8\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=1\\q=2\end{cases}$或$\begin{cases}a_1=-1\\q=-2\end{cases}$．

∴当$\begin{cases}a_1=1\\q=2\end{cases}$时，$a_3=a_1q^2=4$；当$\begin{cases}a_1=-1\\q=-2\end{cases}$时，$a_3=a_1q^2=-4$．

故答案为±4．

12.【解答】圆$x^2-2x+y^2-3=0$ 即 $(x-1)^2+y^2=4$，表示以C（1，0）为圆心，半径等于2的圆．

由于圆心到直线y=x+1的距离为 $d=\frac{|1-0+1|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$，

故弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-2}=2\sqrt{2}$，

故答案为 $2\sqrt{2}$．

13.【解答】∵函数f（x）=sin（$2\omega x-\frac{\pi}{6}$），令 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2\omega x-\frac{\pi}{6}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，k∈z，

求得 $\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6\omega}\leqslant x\leqslant\frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega}$，k∈z，故函数的增区间为$[\frac{k\pi}{\omega}-\frac{\pi}{6\omega},\ \frac{k\pi}{\omega}+\frac{\pi}{3\omega}]$，k∈z．

再由x∈[0，π]，

故当$0<\omega<\frac{1}{3}$时，$\frac{\pi}{3\omega}>\pi$，增区间为[0，π]．

当$1>\omega\geqslant\frac{1}{3}$时，$\frac{\pi}{3\omega}\leqslant\pi$，增区间为$[0,\ \frac{\pi}{3\omega}]$，

故答案为 当$0<\omega<\frac{1}{3}$时，增区间为[0，π]； 当$1>\omega\geqslant\frac{1}{3}$时，增区间为$[0,\ \frac{\pi}{3\omega}]$．

14.【解答】（I）当k=1时，作出不等式组$\begin{cases}y-1\geqslant 0\\x+y-4\leqslant 0\\y-1\leqslant k(x-1)\end{cases}$，

即$\begin{cases}y-1\geqslant 0\\x+y-4\leqslant 0\\y\leqslant x\end{cases}$表示的平面区域，得到如图的△ABC及其内部，

其中A（1，1），B（3，1），C（2，2）

设P（x，y）为区域内一个动点，可得$k_{OP}=\frac{y}{x}$表示P、O两点连线的斜率

运动点P，可得当P与线段AB上某点重合时，$k_{OP}=1$达到最大值；

当P与B重合时，$k_{OP}=\frac{1}{3}$达到最小值

∵$\frac{y}{x^2}=k_{OP}\cdot\frac{1}{x}$，当点P与点A重合时，x达最小值1得$\frac{1}{x}$有最大值1，

且 k_{OP} 达到最大值

∴点 P 与点 A 重合时，$\frac{y}{x^2}$ 有最大值为 1；

（II）根据题意，直线 y﹣1=k（x﹣1）经过定点 A（1，1）

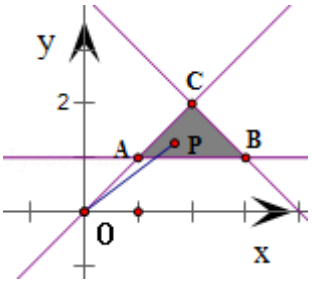
不等式组 $\begin{cases} y-1\geqslant 0 \\ x+y-4\leqslant 0 \\ y-1\leqslant k(x-1) \end{cases}$ 表示的平面区域为直线 AB 上方、直线 BC 的下方，且 y﹣1=k（x﹣1）下方的区域；

$\frac{y}{x^2}$ 的最大值为 1，当点 P 与点 B 重合时 $\frac{y}{x^2}$ 有最大值

∴直线 y﹣1=k（x﹣1）绕 A 点顺时针旋转，且满足斜率大于 0 时，符合题意

因此斜率的范围为（0，2]，即实数 k 的取值范围是（0，2].

故答案为：1，（0，2]



三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.【解答】（I）设 $\{a_n\}$ 的公差为 d

因为 $a_1=1$，$S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\times 10=100$，

所以 $a_{10}=19$

所以 $d=\frac{a_{10}-a_1}{10-1}=\frac{19-1}{9}=2$

所以 $a_n=a_1+（n-1）d=1+2（n-1）=2n-1$；

（II）因为 $S_n=n^2-6n$

当 n≥2 时，$S_{n-1}=(n-1)^2-6(n-1)$

所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-6n-[(n-1)^2-6(n-1)]=2n-7$，n≥2

又 n=1 时，$a_1=S_1=-5$ 适合上式，

所以 $a_n=2n-7$.

所以 $S_n+a_n=n^2-4n-7$

所以不等式 $S_n+a_n>2n$ 化为 $n^2-4n-7>2n$，即 $n^2-6n-7>0$

所以 n＞7 或 n＜－1，

所以 n＞7，n∈N.

则不等式 $S_n+a_n>2n$ 的解集为{n|n＞7，n∈N}.

16.【解答】（I）因为∠ADB=75°，∠ACB=30°，所以∠DAC=45°，在△ACD 中，AD=$\sqrt{2}$，

根据正弦定理有 $\frac{AD}{\sin 30^\circ}=\frac{CD}{\sin 45^\circ}$，…（4 分）

所以 CD=2.　　…（6 分）

（II）由 BD=2DC，可得 BD=4.　…（7 分）

又在△ABD 中，∠ADB=75°，$\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$，…（9 分）

所以 $S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot BD\cdot\sin 75^\circ=\sqrt{3}+1$，…（12 分）

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{3}{2}S_{\triangle ADB}=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$.　　…（13 分）

17.【解答】（I）∵点 P 在平面 ADC 上的正投影 O 恰好落在线段 AC 上，

∴PO⊥平面 ABC，

∴PO⊥AC.

∵AB=BC，

∴O 是 AC 的 中点，

∴OE∥PA.

同理 OF∥AD.

又 OE∩OF=O，PA∩AD=A，

∴平面 OEF∥平面 PDA.

（II）∵OF∥AD，AD⊥CD，

∴OF⊥CD，

又 PO⊥平面 ADC，CD⊂平面 ADC，

∴PO⊥CD，

又 OF∩PO=O，

∴CD⊥平面 POF.

（III）存在，事实上记点 E 为 M 即可，

∵CD⊥平面 POF，PF⊂平面 POF，

∴CD⊥PF，

又 M 为 PC 中点，∴EF=$\frac{1}{2}$PC，

同理，在直角三角形 POC 中，EP=EC=OE=$\frac{1}{2}$PC，

∴点 E 到四个点 P，O，C，F 的距离相等.

18.【解答】（I）把 a=1 代入得，$g(x)=\frac{1}{x}$，

则$f'(x)=\frac{1}{x}$，$g'(x)=\frac{1}{x^2}$

∵f（x）在点 M （x_0，f（x_0））处的切线与 g（x）在点 P （x_0，g（x_0））处的切线平行，

∴$\frac{1}{x_0}=\frac{1}{x_0^2}$，解得 x_0=1，

所以 x_0=1，

（II）由题意设 F（x）=f（x）-g（x）-$\frac{3}{2}$=lnx+$\frac{a}{x}-\frac{3}{2}$，

∵∀x∈（0，e]，都有 f（x）≥g（x）+$\frac{3}{2}$，

∴只要 F（x）在（0，e]上的最小值大于等于 0 即可，

则$F'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$，由 F′（x）=0 得，x=a，

F（x）、F′（x）随 x 的变化情况如下表：

x	（0，a）	a	（a，+∞）
F′（x）	-	0	+
F（x）	递减	极大值	递增

当 a≥e 时，函数 F′（x）在（0，e）上单调递减，F（e）为最小值，

∴F（e）=1+$\frac{a}{e}-\frac{3}{2}\geqslant 0$，得 $a\geqslant\frac{e}{2}$，∴a≥e

当 a＜e 时，函数 F（x）在（0，a）上单调递减，在（a，e）上单调递增，

则 F（a）为最小值，所以 F（a）=lna+$\frac{a}{a}-\frac{3}{2}\geqslant 0$，得 a≥$\sqrt{e}$，

∴$\sqrt{e}\leqslant a<e$

综上，a≥$\sqrt{e}$.

19.【解答】（I）因为椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$=1（a＞b＞0）的四个顶点恰好是一边长为 2，一内角为 60°的菱形的四个顶点，

所以 a=2cos30°=$\sqrt{3}$，b=2sin30°=1，

所以椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$；

（II）设 A（x_1，y_1），则 B（$-x_1$，$-y_1$），

AB 的垂直平分线就是 y 轴，y 轴与直线 l：x+y－3=0 的交点为 P（0，3），

又因为|AB|=$2\sqrt{3}$，|PO|=3，所以∠PAO=60°，

所以△PAB 是等边三角形，所以直线 AB 的方程为 y=0；

当直线 AB 的斜率存在且不为 0 时，设 AB 的方程为 y=kx（k≠0），

由$\begin{cases}\frac{x^2}{3}+y^2=1\\ y=kx\end{cases}$，得（$3k^2+1$）$x^2=3$，

所以$|x_1|=\sqrt{\frac{3}{3k^2+1}}$，则|AO|=$\sqrt{1+k^2}\sqrt{\frac{3}{3k^2+1}}=\sqrt{\frac{3k^2+3}{3k^2+1}}$，

设 AB 的垂直平分线为 y=$-\frac{1}{k}x$，它与直线 l：x+y－3=0 的交点记为 P（x_0，y_0），

所以$\begin{cases}y=-x+3\\ y=\frac{1}{k}x\end{cases}$，解得$\begin{cases}x_0=\frac{3k}{k-1}\\ y_0=\frac{-3}{k-1}\end{cases}$，则|PO|=$\sqrt{\frac{9k^2+9}{(k-1)^2}}$，

因为△PAB 为等边三角形，所以应有|PO|=$\sqrt{3}$|AO|，

代入得到$\sqrt{\frac{9k^2+9}{(k-1)^2}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{3k^2+3}{3k^2+1}}$，解得 k=0（舍），k=－1，

此时直线 AB 的方程为 y=－x，

综上，k 的值为 0 或－1.

20.【解答】（I）

法 1：

1	2	3	－7
－2	1	0	1

改变第 4 列得：

1	2	3	7
－2	1	0	－1

改变第 2 行得：

1	2	3	7
2	－1	0	1

法 2：

1	2	3	- 7
- 2	1	0	1

改变第 2 行得：

1	2	3	7
2	- 1	0	- 1

改变第 4 列得：

1	2	3	7
2	- 1	0	1

法 3：

1	2	3	- 7
- 2	1	0	1

改变第 1 列得：

- 1	2	3	7
2	1	0	- 1

改变第 4 列得：

- 1	2	3	7
2	1	0	- 1

（写出一种即可） …（3 分）

（II） 每一列所有数之和分别为 2，0，- 2，0，每一行所有数之和分别为 - 1，1；

①如果操作第三列，则

a	$a^2 - 1$	a	$- a^2$
2 - a	$1 - a^2$	- a+2	a^2

则第一行之和为 2a - 1，第二行之和为 5 - 2a，

$\begin{cases} 2a-1 \geqslant 0 \\ 5-2a \geqslant 0 \end{cases}$，解得 a=1，a=2．…（6 分）

②如果操作第一行

- a	$-\frac{}{a^2+1}$	a	a^2
2 - a	$1 - a^2$	a - 2	a^2

则每一列之和分别为 $2 - 2a$，$2 - 2a^2$，$2a - 2$，$2a^2$

解得 a=1 …（9 分）

综上 a=1 …（10 分）

（III） 证明：按要求对某行（或某列）操作一次时，则该行的行和（或该列的列和）

由负整数变为正整数，都会引起该行的行和（或该列的列和）增大，

从而也就使得数阵中 mn 个数之和增加，且增加的幅度大于等于 1 - （ - 1）=2，

但是每次操作都只是改变数表中某行（或某列）各数的符号，而不改变其绝对值，

显然，数表中 mn 个数之和必然小于等于$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，

可见其增加的趋势必在有限次之后终止，终止之时必然所有的行和与所有的列和均为非负整数，故结论成立 …（13 分）