2013 北京朝阳高三二模

数　　学（理）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．

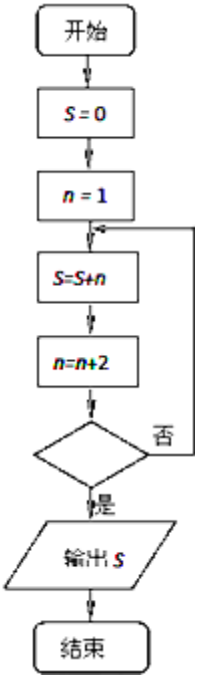
1．（5 分）已知集合 M={0，1，3}，N={x|x=3a，a∈M}，则 M∪N=（　　）

A．{0}　B．{0，3}　C．{1，3，9}　D．{0，1，3，9}

2．（5 分）已知 $\int_0^1 (x^2+mx)dx=0$，则实数 m 的值为（　　）

A．$-\frac{1}{3}$　B．$-\frac{2}{3}$　C．－1　D．－2

3．（5 分）执行如图所示的程序框图，若输出的结果是 16，则判断框内的条件是（　　）

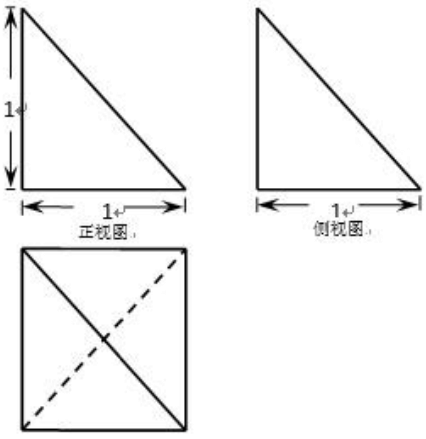


A．n＞6？　B．n≥7？　C．n＞8？　D．n＞9？

4．（5 分）若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$ 的渐近线与抛物线 $y=x^2+2$ 有公共点，则此双曲线的离心率的取值范围是（　　）

A．[3，+∞）　B．（3，+∞）　C．（1，3]　D．（1，3）

5．（5 分）某三棱锥的三视图如图所示，则该三棱锥的体积为（　　）



俯视图

A．$\frac{1}{6}$　B．$\frac{1}{3}$　C．$\frac{1}{2}$　D．1

6．（5 分）某岗位安排 3 名职工从周一到周五值班，每天只安排一名职工值班，每人至少安排一天，至多安排两天，且这两天必须相邻，那么不同的安排方法有（　　）

A．10 种 B．12 种 C．18 种 D．36 种

7．（5 分）已知函数 f（x）=a•$2^{|x|}$+1（a≠0），定义函数 $F(x)=\begin{cases} f(x), & x>0 \\ -f(x), & x<0 \end{cases}$ 给出下列命题：

①F（x）=|f（x）|；

②函数 F（x）是奇函数；

③当 a＜0 时，若 mn＜0，m+n＞0，总有 F（m）+F（n）＜0 成立，

其中所有正确命题的序号是（　　）

A．②　B．①③ C．②③ D．①②

8．（5 分）点 P 是棱长为 1 的正方体 ABCD－$A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 上一点，则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}$的取值范围是（　　）

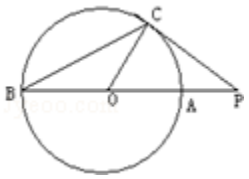
A．[－1，$-\frac{1}{4}$]　B．[$-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{4}$] C．[－1，0] D．[$-\frac{1}{2}$，0]

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．把答案填在答题卡上．

9．（5 分）设 i 为虚数单位，计算$\frac{3+i}{1+i}$=_____．

10．（5 分）若直线 l 与圆 C：$\begin{cases}x=2\cos\theta\\ y=-1+2\sin\theta\end{cases}$（θ 为参数）相交于 A，B 两点，且弦 AB 的中点坐标是（1，－2），则直线 L 的倾斜角为_____．

11．(5 分)如图，PC 切圆 O 于点 C，割线 PAB 经过圆心 O，PC=4，PB=8，则 tan∠COP=_____，△OBC 的面积是_____．



12．（5 分）某公司一年购买某种货物 600 吨，每次都购买 x 吨，运费为 3 万元/次，一年的总存储费用为 2x 万元，若要使一年的总运费与总存储费用之和最小，则每次需购买_____吨．

13．（5 分）将一个质点随机投放在关于 x，y 的不等式组$\begin{cases}3x+4y\leqslant 19\\ x\geqslant 1\\ y\geqslant 1\end{cases}$所构成的三角形区域内，则该质点到此三角形的三个顶点的距离均不小于 1 的概率是_____．

14．（5 分）数列{2^n－1}的前 n 项 1，3，7，…，2^n－1 组成集合 A_n={1，3，7，…，2^n－1}（$n\in N^*$），从集合 A_n 中任取 k（k=1，2，3，…，n）个数，其所有可能的 k 个数的乘积的和为 T_k（若只取一个数，规定乘积为此数本身），记 $S_n=T_1+T_2+\cdots+T_n$，例如当 n=1 时，A_1={1}，T_1=1，S_1=1；当 n=2 时，A_2={1，2}，T_2=1+3，S_2=1+3+1×3=7．则当 n=3 时，S_3=_____；试写出 S_n=_____．

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15．（13 分）在△ABC 中，角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c，且 f（A）=$2\cos\frac{A}{2}\sin(\pi-\frac{A}{2})+\sin^2\frac{A}{2}-\cos^2\frac{A}{2}$．

（Ⅰ）求函数 f（A）的最大值；

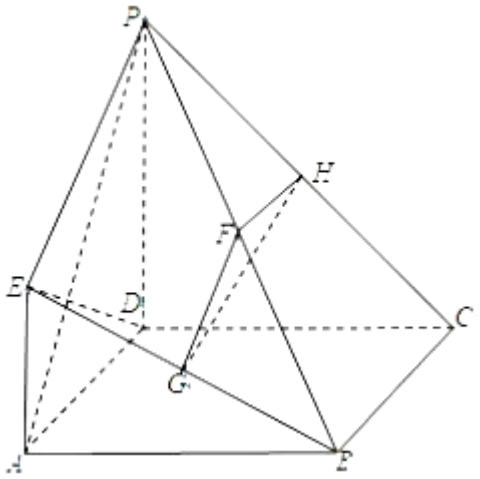
（Ⅱ）若 f（A）=0，C=$\frac{5\pi}{12}$，a=$\sqrt{6}$，求 b 的值．

16．（14 分）如图，四边形 ABCD 是正方形，EA⊥平面 ABCD，EA∥PD，AD=PD=2EA=2，F，G，H 分别为 PB，EB，PC 的中点．

（Ⅰ）求证：FG∥平面 PED；

（Ⅱ）求平面 FGH 与平面 PBC 所成锐二面角的大小；

（Ⅲ）在线段 PC 上是否存在一点 M，使直线 FM 与直线 PA 所成的角为 60°？若存在，求出线段 PM 的长；若不存在，请说明理由.



17.（13 分）为提高学生学习数学的兴趣，某地区举办了小学生“数独比赛”．比赛成绩共有 90 分，70 分，60 分，40 分，30 分五种，按本次比赛成绩共分五个等级．从参加比赛的学生中随机抽取了 30 名学生，并把他们的比赛成绩按这五个等级进行了统计，得到如下数据表：

成绩等级	A	B	C	D	E
成绩（分）	90	70	60	40	30
人数（名）	4	6	10	7	3

（Ⅰ）根据上面的统计数据，试估计从本地区参加“数独比赛”的小学生中任意抽取一人，其成绩等级为“A 或 B”的概率；

（Ⅱ）根据（Ⅰ）的结论，若从该地区参加“数独比赛”的小学生（参赛人数很多）中任选 3 人，记 X 表示抽到成绩等级为“A 或 B”的学生人数，求 X 的分布列及其数学期望 EX；

（Ⅲ）从这 30 名学生中，随机选取 2 人，求“这两个人的成绩之差大于 20 分”的概率.

18.（13 分）已知函数$f(x)=\frac{mx}{x^2+1}+1\ (m\neq 0)$，g（x）=$x^2e^{ax}$（a∈R）.

（Ⅰ）求函数 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）当 m＞0 时，若对任意 x_1，x_2∈[0，2]，f（x_1）≥g（x_2）恒成立，求 a 的取值范围.

19.（14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a＞b＞0）的右焦点为 F（1，0），短轴的端点分别为 B_1，B_2，且$\overrightarrow{FB_1}\cdot\overrightarrow{FB_2}=-a$.

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）过点 F 且斜率为 k（k≠0）的直线 l 交椭圆于 M，N 两点，弦 MN 的垂直平分线与 x 轴相交于点 D．设弦 MN 的

中点为P，试求$\frac{|DP|}{|MN|}$的取值范围.

20．（13 分）已知实数 x_1，x_2，…，x_n（$n\in N^*$且 $n\geqslant 2$）满足$|x_i|\leqslant 1$（i=1，2，…，n），记$S(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$.

（Ⅰ）求$S(-1, 1, -\frac{2}{3})$及S（1，1，－1，－1）的值；

（Ⅱ）当n=3时，求S（x_1，x_2，x_3）的最小值；

（Ⅲ）当n为奇数时，求S（x_1，x_2，…，x_n）的最小值.

注：$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j$表示$x_1$，$x_2$，…，$x_n$中任意两个数$x_i$，$x_j$（$1\leqslant i<j\leqslant n$）的乘积之和.

参考答案

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【解答】由 M={0，1，3}，N={x|x=3a，a∈M}，则 N={0，3，9}.

所以 M∪N={0，1，3}∪{0，3，9}={0，1，3，9}.

故选 D.

2.【解答】∵ $\int_0^1(x^2+mx)dx=(\frac{x^3}{3}+\frac{mx^2}{2})|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{m}{2}$,

令$\frac{1}{3}+\frac{m}{2}=0$，解得 m=$-\frac{2}{3}$.

故选 B.

3.【解答】框图首先赋值 s=0，n=1，执行 s=0+1=1，n=1+2=3；

判断框中的条件不满足，执行 s=1+3=4，n=3+2=5；

判断框中的条件不满足，执行 s=4+5=9，n=5+2=7；

判断框中的条件不满足，执行 s=9+7=16，n=7+2=9；

此时判断框中的条件满足，执行“是”路径，输出结果为 16.

由此看出，判断框中的条件应是选项 C，即 n＞8.

故选 C.

4.【解答】依题意可知双曲线渐近线方程为 y=$\pm\frac{b}{a}$x，与抛物线方程联立消去 y 得 $x^2\pm\frac{b}{a}x+2=0$

∵渐近线与抛物线有交点

∴△=$\frac{b^2}{a^2}-8\geqslant 0$，求得 $b^2\geqslant 8a^2$，

∴c=$\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 3a$

∴e=$\frac{c}{a}\geqslant 3$.

则双曲线的离心率 e 的取值范围：e≥3.

故选 A.

5.【解答】由题设条件，此几何几何体为一个三棱锥，

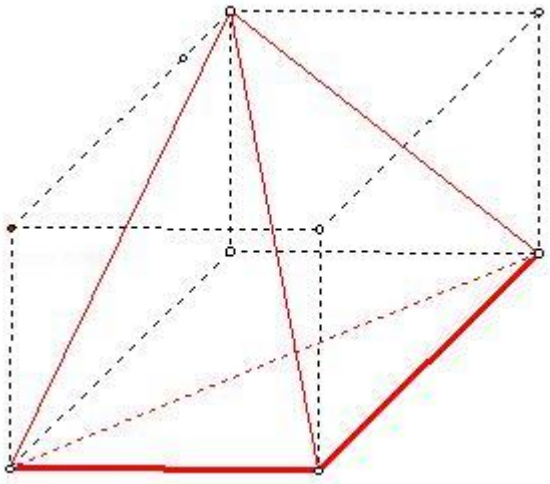
如图红色的部分.

其高已知为 1，底面是直角边长度为 1 的等腰直角三角形，

底面积是 $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$

其体积是 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{6}$.

故选 A.



6.【解答】由题意可知，3 名职工中只有一人（有 C_3^1种分法）值班一天，且只有在周一或周三或周五值，有三种选法，

譬如甲周一值班，则周二与周三一人值班，周四与周五另一人值班，有 A_2^2种方法，

由分步乘法计数原理得：不同的安排方法共有 $C_3^1\cdot C_3^1\cdot A_2^2=18$ 种.

故选 C.

7.【解答】由题意得，F（x）=$\begin{cases}a\cdot2^x+1, & x>0\\ -a\cdot2^{-x}-1. & x<0\end{cases}$，

而|f（x）|=$\begin{cases}a\cdot2^{|x|}+1, & f(x)>0\\ -a\cdot2^{|x|}-1, & f(x)<0\end{cases}$，它和 F（x）并不是同一个函数，故①错误；

∵函数 f（x）=$a\cdot2^{|x|}+1$ 是偶函数，

当 x＞0 时，－x＜0，则 F（－x）=－f（－x）=－f（x）=－F（x）；

当 x＜0 时，－x＞0，则 F（－x）=f（－x）=f（x）=－F（x）；

故函数 F（x）是奇函数，②正确；

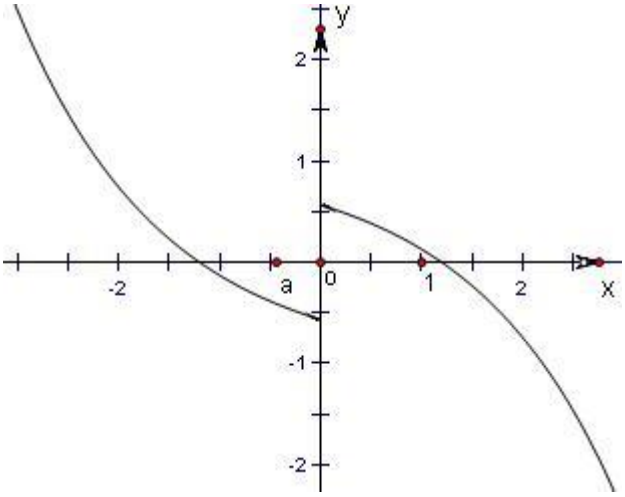
当 a＜0 时，F（x）在（0，+∞）上是减函数，

若 mn＜0，m+n＞0，总有 m＞－n＞0，

∴F（m）＜F（－n），即 F（m）＜－F（n），

∴F（m）+F（n）＜0 成立，故③正确.

故选 C.



8.【解答】如图所示：以点 D 为原点，以 DA 所在的直线为 x 轴，以 DC 所在的直线为 y 轴，以 DD_1 所在的直线为 z 轴，

建立空间直角坐标系.

则点 A（1，0，0），C_1（0，1，1），设点 P 的坐标为（x，y，z），则由题意可得 0≤x≤1，0≤y≤1，z=1.

∴$\overrightarrow{PA}$=（1－x，－y，－1），$\overrightarrow{PC_1}$=（－x，1－y，0），

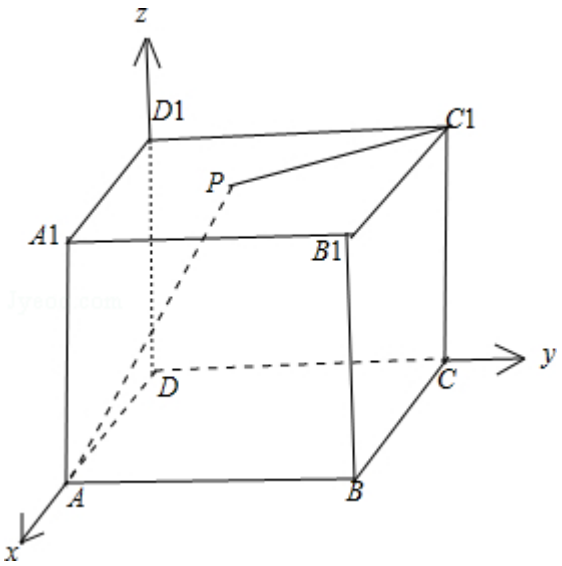
∴$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}$=－x（1－x）－y（1－y）+0=$x^2$－x+$y^2$－y=$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$，

由二次函数的性质可得，当 x=y=$\frac{1}{2}$时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}$取得最小值为－$\frac{1}{2}$；

故当 x=0 或 1，且 y=0 或 1 时，$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}$取得最大值为 0，

则$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC_1}$的取值范围是[－$\frac{1}{2}$，0]，

故选 D.



二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分. 把答案填在答题卡上.

9.【解答】$\frac{3+i}{1+i}=\frac{(3+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{4-2i}{2}=2-i$.

故答案为：2 - i

10.【解答】将圆方程化为普通方程得：$x^2+(y+1)^2=4$，

∴圆心坐标为（0，－1），

∵弦 AB 的中点坐标是（1，－2），

∴圆心与中点连线斜率为$\frac{-1+2}{0-1}=-1$，

∴直线 l 的斜率为 1，

则直线 l 的倾斜角为$\frac{\pi}{4}$.

故答案为：$\frac{\pi}{4}$

11.【解答】∵PC 切圆 O 于点 C，根据切割线定理即可得出 $PC^2=PA\cdot PB$，∴$4^2=8PA$，解得 PA=2.

设圆的半径为 R，

则 2+2R=8，解得 R=3.

在 Rt△OCP 中，$\tan\angle COP=\frac{PC}{OC}=\frac{4}{3}$，$\sin\angle COP=\frac{PC}{OP}=\frac{4}{5}$.

∵∠BOC+∠COP=π，∴$\sin\angle BOC=\sin(\pi-\angle COP)=\sin\angle COP=\frac{4}{5}$.

∴$S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}R^2\sin\angle BOC=\frac{1}{2}\times 3^2\times\frac{4}{5}=\frac{18}{5}$.

故答案分别为$\frac{4}{3}$，$\frac{18}{5}$.

12.【解答】设公司一年的总运费与总存储费用之和为 y 万元.

买货物 600 吨，每次都购买 x 吨，则需要购买的次数为$\frac{600}{x}$次，

因为每次的运费为 3 万元，则总运费为 3×$\frac{600}{x}$万元.

所以 y=$3\times\frac{600}{x}+2x$ （0＜x≤600）.

则$y=\frac{1800}{x}+2x\geqslant 2\sqrt{\frac{1800}{x}\cdot 2x}=120$.

当且仅当$\frac{1800}{x}=2x$，即 x=30 时取得最小值.

所以，要使一年的总运费与总存储费用之和最小，则每次需购买 30 吨.

故答案为 30.

13.【解答】画出关于 x，y 的不等式组$\begin{cases}3x+4y\leqslant 19\\ x\geqslant 1\\ y\geqslant 1\end{cases}$ 所构成的三角形区域，如图.

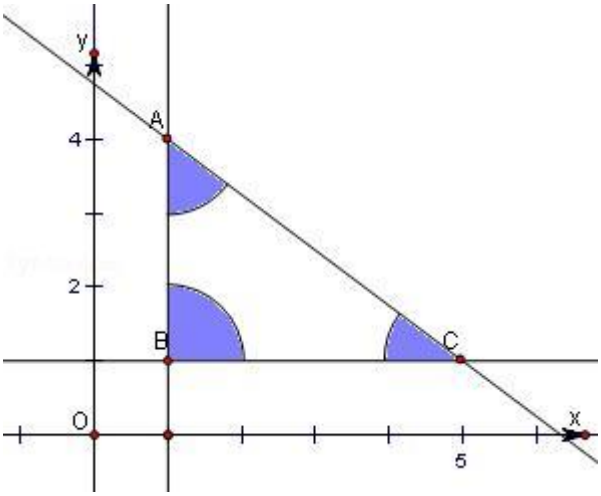
三角形 ABC 的面积为 $S_1=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$，

离三个顶点距离都不大于 1 的地方的面积为 $S_2=\frac{1}{2}\pi$

所以其恰在离三个顶点距离都不小于 1 的地方的概率为

$P=1-\frac{\frac{\pi}{2}}{6}=1-\frac{\pi}{12}$.

故答案为：$1-\frac{\pi}{12}$.



14.【解答】当 n=3 时，$A_3=\{1，3，7\}$，

$T_1=1+3+7=11$，$T_2=1\times 3+1\times 7+3\times 7=31$，$T_3=1\times 3\times 7=21$，

所以 $S_3=11+31+21=63$；

由 $S_1=1=2^1-1=2^{\frac{1\times2}{2}}-1$，$S_2=7=2^3-1=2^{\frac{2\times3}{2}}-1$，$S_3=63=2^6-1=2^{\frac{3\times4}{2}}-1$，猜想 $S_n=2^{\frac{n(n+1)}{2}}-1$，下面证明：

（1）易知 n=1 时成立；

（2）假设 n=k 时 $S_k=2^{\frac{k(k+1)}{2}}-1$，

则 n=k+1 时，$S_{k+1}=T_1+T_2+T_3+\cdots+T_{k+1}$

$=[T_1'+(2^{k+1}-1)]+[T_2'+(2^{k+1}-1)T_1']+[T_3'+(2^{k+1}-1)T_2']+\cdots+[T_k'+(2^{k+1}-1)T_k']$（其中 T_i'，i=1，2，…，k，为 n=k 时可能的 k 个数的乘积的和为 T_k），

$=(T_1'+T_2'+T_3'+\cdots T_k')+(2^{k+1}-1)+(2^{k+1}-1)(T_1'+T_2'+T_3'+\cdots T_k')$

$=S_k+(2^{k+1}-1)+(2^{k+1}-1)S_k$

$=2^{k+1}(2^{\frac{k(k+1)}{2}}-1)+(2^{k+1}-1)$

$=2^{k+1}\cdot2^{\frac{k(k+1)}{2}}-1=2^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}-1$，即 n=k 时 $S_{k+1}=2^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}-1$ 也成立，

综合（1）（2）知对 $n\in N^*$ $S_n=2^{\frac{n(n+1)}{2}}-1$ 成立.

所以 $S_n=2^{\frac{n(n+1)}{2}}-1$.

故答案为：63；$S_n=2^{\frac{n(n+1)}{2}}-1$.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分.解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.【解答】（Ⅰ）$f(A)=2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}+\sin^2\frac{2A}{2}-\cos^2\frac{2A}{2}=\sin A-\cos A=\sqrt{2}\sin(A-\frac{\pi}{4})$.

因为 0＜A＜π，所以 $-\frac{\pi}{4}<A-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$.

则所以当 $A-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，即 $A=\frac{3\pi}{4}$时，f（A）取得最大值，且最大值为$\sqrt{2}$. …（7 分）

（Ⅱ）由题意知$f(A)=\sqrt{2}\sin(A-\frac{\pi}{4})=0$，所以$\sin(A-\frac{\pi}{4})=0$.

又知 $-\frac{\pi}{4}<A-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，所以 $A-\frac{\pi}{4}=0$，则 $A=\frac{\pi}{4}$.

因为$C=\frac{5\pi}{12}$，所以$A+B=\frac{7\pi}{12}$，则$B=\frac{\pi}{3}$.

由$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$得，$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{\sqrt{6}\cdot\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{4}}=3$.　　…（13 分）

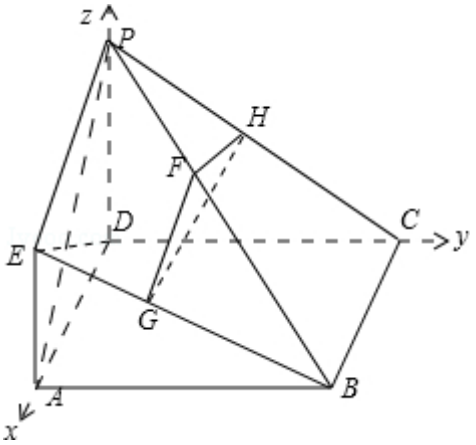
16.【解答】（Ⅰ）证明：因为 F，G 分别为 PB，BE 的中点，所以 FG∥PE.

又 FG⊄平面 PED，PE⊂平面 PED，所以 FG∥平面 PED.

（Ⅱ）解：因为 EA⊥平面 ABCD，所以 PD⊥平面 ABCD，所以 PD⊥AD，PD⊥CD.

又因为四边形 ABCD 是正方形，所以 AD⊥CD.

如图建立空间直角坐标系，



因为 AD=PD=2EA，所以 D（0，0，0），P（0，0，2），A（2，0，0），

C（0，2，0），B（2，2，0），E（2，0，1）.

因为 F，G，H 分别为 PB，EB，PC 的中点，所以 F（1，1，1），G（2，1，$\frac{1}{2}$），H（0，1，1）.

所以$\overrightarrow{GF}=(-1,\ 0,\ \frac{1}{2})$，$\overrightarrow{GH}=(-2,\ 0,\ \frac{1}{2})$，

设$\overrightarrow{n_1}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$为平面 FGH 的一个法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{GF}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{GH}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}-x_1+\frac{1}{2}z_1=0\\ -2x_1+\frac{1}{2}z_1=0\end{cases}$，

再令 $y_1=1$，得$\overrightarrow{n_1}=(0,\ 1,\ 0)$.

$\overrightarrow{PB}=(2,\ 2,\ -2)$，$\overrightarrow{PC}=(0,\ 2,\ -2)$，

设$\overrightarrow{n_2}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$为平面 PBC 的一个法向量，则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PB}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PC}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}2x_2+2y_2-2z_2=0\\ 2y_2-2z_2=0\end{cases}$，

令 $z_2=1$，得$\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ 1)$.

所以$|\cos\langle\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}\rangle|=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{|(0,\ 1,\ 0)\cdot(0,\ 1,\ 1)|}{1\times\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

所以平面 FGH 与平面 PBC 所成锐二面角的大小为$\frac{\pi}{4}$.

（Ⅲ）在线段 PC 上存在点 M，使直线 FM 与直线 PC 所成角为 60°

证明：假设在线段 PC 上存在点 M，使直线 FM 与直线 PC 所成角为 60°．

依题意可设$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{PC}$，其中 0≤λ≤1.

由$\overrightarrow{PC}=(0,\ 2,\ -2)$，则$\overrightarrow{PM}=(0,\ 2\lambda,\ -2\lambda)$.

又因为$\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FP}+\overrightarrow{PM}$，$\overrightarrow{FP}=(-1,\ -1,\ 1)$，

所以$\overrightarrow{FM}=(-1,\ 2\lambda-1,\ 1-2\lambda)$.

又直线 FM 与直线 PA 成 60°角，$\overrightarrow{PA}(2,\ 0,\ -2)$，

所以$|\cos<\overrightarrow{FM},\ \overrightarrow{PA}>|=\frac{1}{2}$，即$\frac{1}{2}=\frac{|-2-2+4\lambda|}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+2(2\lambda-1)^2}}$，解得：$\lambda=\frac{5}{8}$.

所以$\overrightarrow{PM}=(0,\ \frac{5}{4},\ -\frac{5}{4})$，$|\overrightarrow{PM}|=\sqrt{0+2\times(\frac{5}{4})^2}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

所以，在线段 PC 上存在点 M，使直线 FM 与直线 PC 所成角为 60°，此时 PM 的长为$\frac{5\sqrt{2}}{4}$.

17.【解答】（I）根据统计数据可知，从本地区参加“数独比赛”的 30 名小学生中任意抽取一人，其成绩等级为“A 或 B”的概率为$\frac{4}{30}+\frac{6}{30}=\frac{1}{3}$，

即从本地区参加“数独比赛”的小学生中任意抽取一人，其成绩等级为“A 或 B”的概率为$\frac{1}{3}$.

（II）由题意知随机变量 X 可取 0，1，2，3，

∴P（X=0）=$C_3^0(\frac{1}{3})^0(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$；P（X=1）=$C_3^1(\frac{1}{3})^1(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$；

P（X=2）=$C_3^2(\frac{1}{3})^2(\frac{2}{3})=\frac{2}{9}$；

P（X=3）=$C_3^3(\frac{1}{3})^3(\frac{2}{3})^0=\frac{1}{27}$；

所以 X 的分布列为（必须写出分布列，否则扣 1 分）

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

…（11 分）

故 Eξ=$0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{4}{9}+2\times\frac{2}{9}+3\times\frac{1}{27}=1$，所求期望值为 1.

（III）设事件 M：从这 30 名学生中，随机选取 2 人，这两个人的成绩之差大于 20 分.

设从这 30 名学生中，随机选取 2 人，记两个人的成绩分别为 m，n.

则基本事件的总数为C_{30}^{2}，

不妨设 m＞n，

当 m=90 时，n=60 或 40 或 30，基本事件的数为 C_{4}^{1}（C_{10}^{1}+C_{7}^{1}+C_{3}^{1}）；

当 m=70 时，n=40 或 30，基本事件的数为 C_{6}^{1}（C_{7}^{1}+C_{3}^{1}）；

当 m=60 时，n=30，基本事件的数为 $C_{10}^{1}C_{3}^{1}$；

∴P（M）=$\frac{C_4^1(C_{10}^1+C_7^1+C_3^1)+C_6^1(C_7^1+C_3^1)+C_{10}^1C_3^1}{C_{30}^2}=\frac{34}{87}$.

∴从这 30 名学生中，随机选取 2 人，“这两个人的成绩之差大于 20 分”的概率为$\frac{34}{87}$.

18.【解答】函数$f(x)=\frac{mx}{x^2+1}+1\ (m\neq 0)$的定义域为 R，

$f'(x)=\frac{m(1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\frac{m(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$.

①当 m＞0 时，当 x 变化时，$f'(x)$，f（x）的变化情况如表：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	+	−
$f(x)$	↓	↑	↓

所以，函数 f（x）的单调增区间时（－1，1），单调递减区间是（－∞，－1），（1，+∞）.

②当 m＜0 时，当 x 变化时，$f'(x)$，f（x）的变化情况如表：

x	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(-,+\infty)$
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	↑	↓	↑

所以，函数 f（x）的单调减区间时（－1，1），单调递增区间是（－∞，－1），（1，+∞）.

（Ⅱ）依题意，对任意当 m＞0 时，对于任意 x_1，x_2∈[0，2]，f（x_1）≥g（x_2）恒成立，等价于

当 m＞0 时，对于任意 x_1，x_2∈[0，2]，$f(x)_{min}\geq g(x)_{max}$成立.

当 m＞0 时，由（Ⅰ）知，函数 f（x）在[0，1]上单调递增，在[1，2]上单调递减，

因为 f（0）=1，f（2）=$\frac{2m}{5}+1>1$，所以函数 f（x）的最小值为 f（0）=1.

所以应满足 $g(x)_{max}\leq 1$.

因为 g（x）=x^2e^{ax}，所以 $g'(x)=(ax^2+2x)e^{ax}$.

③当 a=0 时，函数 g（x）=x^2，任意 x∈[0，2]，$g(x)_{max}$=g（2）=4，

显然不满足 g（x）$_{max}$≤1，故 a=0 不成立.

④当 a≠0 时，令 g′（x）=（ax^2+2x）e^{ax}=0 得：$x_1=0$，$x_2=-\frac{2}{a}$

1° 当 $-\frac{2}{a}\geqslant 2$，即 - 1≤a＜0 时，在[0，2]上 g′（x）≥0，所以函数 g（x）在[0，2]上单调递增，

所以 $g(x)_{max}=g(2)=4e^{2a}$.

由 $4e^{2a}\leqslant 1$ 得，a≤ - ln2，所以 - 1≤a≤ - ln2.

2° 当 0＜ $-\frac{2}{a}<2$，即 a＜ - 1 时，在 $[0,\ -\frac{2}{a})$ 上 g′（x）≥0，在 $(-\frac{2}{a},\ 2]$ 上 g′（x）＜0，

所以函数 g（x）在 $[0,\ -\frac{2}{a})$ 上单调递增，在 $(-\frac{2}{a},\ 2]$ 上单调递减.

所以 $g(x)_{max}=g(\frac{2}{a})=\frac{4}{a^2e^2}$.

由 $\frac{4}{a^2e^2}\leqslant 1$ 得：$a\leqslant -\frac{2}{e}$，所以 a＜ - 1.

3° 当 $-\frac{2}{a}<0$，即 a＞0 时，显然在[0，2]上 g′（x）≥0，

函数 g（x）在[0，2]上单调递增，且 $g(x)_{max}=g(2)=4e^{2a}$.

显然 $g(x)_{max}=4e^{2a}\leqslant 1$ 不成立，故 a＞0 不成立.

综上所述，a 的取值范围是（ - ∞，- ln2].

19.【解答】（Ⅰ）由题意不妨设 B_1（0，- b），B_2（0，b），则 $\overrightarrow{FB_1}=(-1,\ -b)$，$\overrightarrow{FB_2}=(-1,\ b)$.

∵ $\overrightarrow{FB_1}\cdot\overrightarrow{FB_2}$= - a，∴1 - b^2= - a，又∵a^2 - b^2=1，解得 a=2，$b=\sqrt{3}$.

∴椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$；

（Ⅱ）由题意得直线 l 的方程为 y=k（x - 1）.

联立 $\begin{cases}y=k(x-1)\\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\end{cases}$ 得（$3+4k^2$）x^2 - $8k^2x$+$4k^2$ - 12=0.

设 M（x_1，y_1），N（x_2，y_2），则 $x_1+x_2=\frac{8k^2}{3+4k^2}$，$x_1x_2=\frac{4k^2-12}{3+4k^2}$.

∴弦 MN 的中点 P $(\frac{4k^2}{3+4k^2},\ \frac{-3k}{3+4k^2})$.

∴$|MN|=\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\sqrt{(1+k^2)[\frac{64k^2}{(3+4k^2)^2}-\frac{4(4k^2-12)}{3+4k^2}]}=\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}$.

直线 PD 的方程为 $y+\frac{3k}{4k^2+3}=-\frac{1}{k}(x-\frac{4k^2}{4k^2+3})$.

$\therefore |DP|=\frac{3\sqrt{k^2(k^2+1)}}{4k^2+3}$.

$\therefore \frac{|DP|}{|MN|}=\frac{\frac{3\sqrt{k^2(k^2+1)}}{4k^2+3}}{\frac{12(k^2+1)}{4k^2+3}}=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{k^2}{k^2+1}}=\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{k^2+1}}$.

又∵$k^2+1>1$，$\therefore 0<\frac{1}{k^2+1}<1$，

$\therefore 0<\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{k^2+1}}<\frac{1}{4}$.

$\therefore \frac{|DP|}{|MN|}$的取值范围是 $(0, \frac{1}{4})$.

20.【解答】（Ⅰ）由已知得$S(-1, 1, -\frac{2}{3})=-1+\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=-1$.

S（1，1，－1，－1）=1－1－1－1－1+1=－2.　　…（3 分）

（Ⅱ）n=3 时，$S=S(x_1, x_2, x_3)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} x_i x_j=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$.

固定 x_2，x_3，仅让 x_1 变动，那么 S 是 x_1 的一次函数或常函数，

因此 S≥min{S（1，x_2，x_3），S（－1，x_2，x_3）}.

同理 S（1，x_2，x_3）≥min{S（1，1，x_3），S（1，－1，x_3）}.

S（－1，x_2，x_3）≥min{S（－1，1，x_3），S（－1，－1，x_3）}.

以此类推，我们可以看出，S 的最小值必定可以被某一组取值±1 的 x_1，x_2，x_3所达到，

于是 S≥min{S（x_1，x_2，x_3）}.

当 $x_k=\pm 1$（k=1，2，3）时，$S=\frac{1}{2}[(x_1+x_2+x_3)^2-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)]=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)^2-\frac{3}{2}$.

因为$|x_1+x_2+x_3|\geq 1$，

所以 $S\geqslant\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=-1$，且当 $x_1=x_2=1$，$x_3=-1$，时 S=－1，

因此 $S_{min}=-1$.　　…（7 分）

（Ⅲ）$S=S(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_1x_n+x_2x_3+\cdots+x_2x_n+\cdots+x_{n-1}x_n$.

固定 x_2，x_3，…，x_n，仅让 x_1 变动，那么 S 是 x_1 的一次函数或常函数，

因此 S≥min{S（1，x_2，x_3，…，x_n），S（－1，x_2，x_3，…，x_n）}.

同理 S（1，x_2，x_3，…，x_n）≥min{S（1，1，x_3，…，x_n），S（1，－1，x_3，…，x_n）}.

S（－1，x_2，x_3，…，x_n）≥min{S（－1，1，x_3，…，x_n），S（－1，－1，x_3，…，x_n）}.

以此类推，我们可以看出，S 的最小值必定可以被某一组取值±1 的 x_1，x_2，…，x_n所达到，

于是 S≥min{S（x_1，x_2，x_3，…，x_n）}.

当 x_k=±1（k=1，2，…，n）时，

$$S=\frac{1}{2}[(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)]=\frac{1}{2}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2-\frac{n}{2}.$$

当 n 为奇数时，因为$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\geqslant 1$，

所以$S\geqslant -\frac{1}{2}(n-1)$，另一方面，若取$x_1=x_2=\cdots=x_{\frac{n-1}{2}}=1$，$x_{\frac{n-1}{2}+1}=x_{\frac{n-1}{2}+2}=\cdots=x_n=-1$，

那么$S=-\frac{1}{2}(n-1)$，

因此$S_{min}=-\frac{1}{2}(n-1)$．…（13 分）