2013 北京昌平高三二模

数　　学（理）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1.（5 分）已知集合 A={x|2^x＞1}，B={x|x＜1}，则 A∩B=（　　）

A．{x|x＞1}　B．{x|x＞0}　C．{x|0＜x＜1}　D．{x|x＜1}

2.（5 分）已知命题 p：∀x∈R，x≥2，那么下列结论正确的是（　　）

A．命题¬p：∀x∈R，x≤2　B．命题¬p：∃x∈R，x＜2

C．命题¬p：∀x∈R，x≤－2　D．命题¬p：∃x∈R，x＜－2

3.（5 分）圆 $x^2+(y-2)^2=1$ 的圆心到直线 $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-t\end{cases}$（t 为参数）的距离为（　　）

A．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　B．1　C．$\sqrt{2}$　D．$2\sqrt{2}$

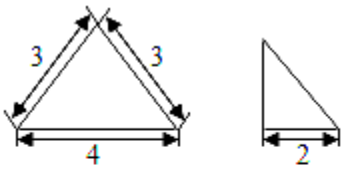
4.（5 分）设 $\begin{cases}x+y\geqslant 0\\x-y\geqslant 0\end{cases}$ 与抛物线 $y^2=-4x$ 的准线围成的三角形区域（包含边界）为 D，P（x，y）为 D 内的一个动点，则目标函数 z=x－2y 的最大值为（　　）

A．－1　B．0　C．2　D．3

5.（5 分）在区间[0，π]上随机取一个数 x，则事件“tanx•cosx $\geqslant\frac{1}{2}$”发生的概率为（　　）

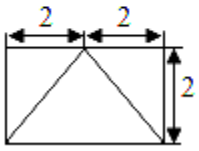
A．$\frac{1}{3}$　B．$\frac{1}{2}$　C．$\frac{2}{3}$　D．$\frac{3}{4}$

6.（5 分）已知四棱锥 P－ABCD 的三视图如图所示，则四棱锥 P－ABCD 的四个侧面中面积最大的是（　　）



正视图

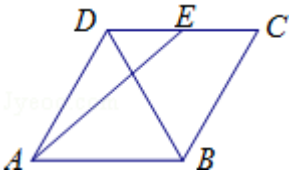
侧视图



俯视图

A．3　B．$2\sqrt{5}$　C．6　D．8

7.（5 分）如图，在边长为 2 的菱形 ABCD 中，∠BAD=60°，E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$ 的值为（　　）



A．1　B．$\sqrt{3}$　C．$\sqrt{5}$　D．$\sqrt{7}$

8．（5 分）设等比数列{}的公比为 q，其前 n 项的积为 T_n，并且满足条件 $a_1>1$，$a_{99}a_{100}-1>0$，$\frac{a_{99}-1}{a_{100}-1}<0$．给出下列结论：

①$0<q<1$；

②$a_{99}\cdot a_{101}-1>0$；

③T_{100} 的值是 T_n 中最大的；

④使 $T^n>1$ 成立的最大自然数 n 等于 198

其中正确的结论是（　　）

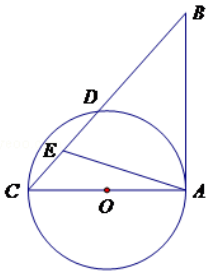
A．①③ B．①④ C．②③ D．②④

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9．（5 分）二项式 $(2x+\frac{1}{x})^5$ 的展开式中 x^3 的系数为_____．

10．（5 分）双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，则 b=_____．

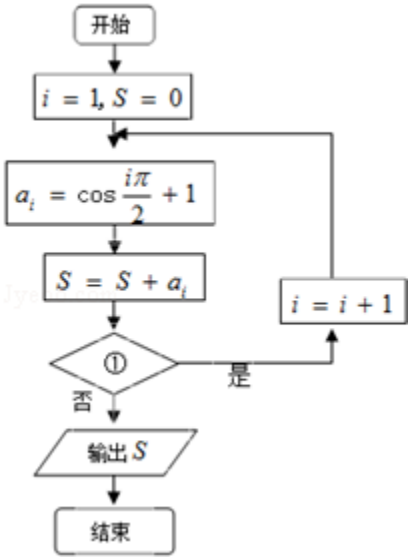
11.（5 分）如图，AB 切圆 O 于点 A，AC 为圆 O 的直径，BC 交圆 O 于点 D，E 为 CD 的中点，且 BD=5，AC=6，则 CD=_____；AE=_____．



12．（5 分）执行如图所示的程序框图，

若①是 i<6 时，输出的 S 值为_____；

若①是 i<2013 时，输出的 S 值为_____．



13．（5 分）已知函数 f（x）=$\begin{cases}1+\frac{4}{x}, & (x\geqslant 4)\\ \log_2 x, & (0<x<4)\end{cases}$，若关于 x 的方程 f（x）=k 有两个不同的实根，则实数 k 的取值范围是_____．

14．（5 分）曲线 C 是平面内到直线 l_1：x=－1 和直线 l_2：y=1 的距离之积等于常数 k^2（k>0）的点的轨迹．给出下列四个结论：

①曲线 C 过点（－1，1）；

②曲线 C 关于点（－1，1）对称；

③若点 P 在曲线 C 上，点 A，B 分别在直线 l_1，l_2 上，则|PA|+|PB|不小于 2k；

④设 p_1 为曲线 C 上任意一点，则点 P_1 关于直线 x=－1、点（－1，1）及直线 y=1 对称的点分别为 P_1、P_2、P_3，则四边形 $P_0P_1P_2P_3$ 的面积为定值 $4k^2$.

其中，所有正确结论的序号是_____.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

15.（13 分）已知函数 f（x）=sin（π－2x）+$2\sqrt{3}\cos^2 x$，x∈R.

（Ⅰ）求 f（$\frac{\pi}{6}$）；

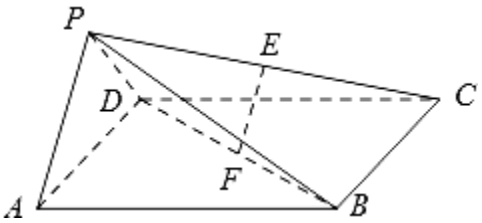
（Ⅱ）求 f（x）的最小正周期及单调递增区间.

16.（14 分）如图，在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是边长为 2 的正方形，侧面 PAD⊥底面 ABCD，且 PA=PD=$\frac{\sqrt{2}}{2}$AD，E、F 分别为 PC、BD 的中点.

（Ⅰ） 求证：EF∥平面 PAD；

（Ⅱ） 求证：面 PAB⊥平面 PDC；

（Ⅲ） 在线段 AB 上是否存在点 G，使得二面角 C－PD－G 的余弦值为$\frac{1}{3}$？说明理由.



17.（13 分）某市为了提升市民素质和城市文明程度，促进经济发展有大的提速，对市民进行了“生活满意”度的调查．现随机抽取 40 位市民，对他们的生活满意指数进行统计分析，得到如下分布表：

满意级别	非常满意	满意	一般	不满意
满意指数（分）	90	60	30	0
人数（个）	15	17	6	2

（I）求这 40 位市民满意指数的平均值；

（II）以这 40 人为样本的满意指数来估计全市市民的总体满意指数，若从全市市民（人数很多）中任选 3 人，记 ξ 表示抽到满意级别为“非常满意或满意”的市民人数．求 ξ 的分布列；

（III）从这 40 位市民中，先随机选一个人，记他的满意指数为 m，然后再随机选另一个人，记他的满意指数为 n，求 n≥m+60 的概率.

18.（13 分）已知函数 f（x）=$\frac{1}{2}x^2-a\ln x(a>0)$.

（Ⅰ）若 a=2，求 f（x）在（1，f（1））处的切线方程；

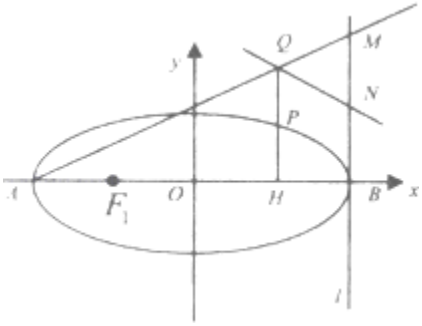
（Ⅱ）求 f（x）在区间[1，e]上的最小值；

（Ⅲ）若 f（x）在区间（1，e）上恰有两个零点，求 a 的取值范围.

19.（13 分）如图. 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的长轴为 AB，过点 B 的直线 l 与 x 轴垂直，椭圆的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，F_1为椭圆的左焦点且$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{F_1B}=1$.

（Ⅰ）求椭圆的标准方程；

（Ⅱ）设 P 是椭圆上异于 A、B 的任意一点，PH⊥x 轴，H 为垂足，延长 HP 到点 Q 使得 HP=PQ. 连接 AQ 并延长交直线 l 于点 M，N 为 MB 的中点，判定直线 QN 与以 AB 为直径的圆 O 的位置关系.



20.（14 分）设数列$\{a_n\}$，对任意 $n\in N^*$都有（kn+b）（a_1+a_n）+p=2（$a_1+a_2\cdots+a_n$），（其中 k、b、p 是常数）.

（1）当 k=0，b=3，p=－4 时，求 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$；

（2）当 k=1，b=0，p=0 时，若 $a_3=3$，$a_9=15$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（3）若数列$\{a_n\}$中任意（不同）两项之和仍是该数列中的一项，则称该数列是“封闭数列”. 当 k=1，b=0，p=0 时，设 S_n是数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$a_2-a_1=2$，试问：是否存在这样的“封闭数列”$\{a_n\}$，使得对任意 $n\in N^*$，都有 $S_n\neq0$，且$\frac{1}{12}<\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{11}{18}$. 若存在，求数列$\{a_n\}$的首项 a_1的所有取值；若不存在，说明理由.

参考答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1.【解答】∵集合 B={x|2^x＞1}=（0，+∞），

又 B={x|x＜1}，

故 A∩B={x|0＜x＜1}

故选 C.

2.【解答】由题意 p：∀x∈R，x≥2，

∴¬p：∃x∈R，x＜2，

故选 B.

3.【解答】把直线 $\begin{cases}x=3+t\\y=-2-t\end{cases}$（t 为参数）的方程，消去参数，化为普通方程为 y=1﹣x，即 x+y﹣1=0.

故圆心（0，2）到直线的距离为 $\frac{|0+2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

故选 A.

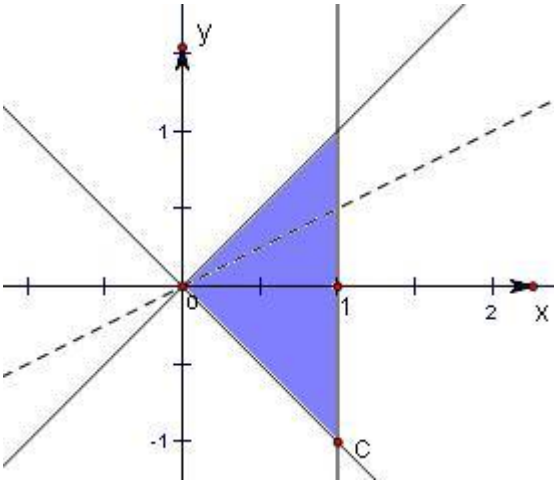
4.【解答】由题意，抛物线 y^2=﹣4x 的准线 x=1，它和不等式$\begin{cases}x+y\geqslant 0\\x-y\geqslant 0\end{cases}$共同围成的三角形区域为图中阴影部分，

目标函数为 z=x﹣2y，作出可行域如右图，

由图象可知当直线经过点 C 时，直线 z=x﹣2y 的截距最小，此时 z 最大，

点 C 的坐标为（1，﹣1），此时 z=1﹣2×（﹣1）=3.

故选 D.



5.【解答】∵tanx•cosx$\geqslant\frac{1}{2}$，即 sinx$\geqslant\frac{1}{2}$且 cosx≠0，

∵x∈[0，π]，∴x∈[$\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{2}$）∪（$\frac{\pi}{2}$，$\frac{5\pi}{6}$]

∴在区间[0，π]内，满足 tanx•cosx$\geqslant\frac{1}{2}$发生的概率为 P=$\frac{\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{6}}{\pi-0}=\frac{2}{3}$.

故选 C.

6.【解答】因为三视图复原的几何体是四棱锥，顶点在底面的射影是底面矩形的长边的中点，底面边长分别为 4，2，

后面是等腰三角形，腰为 3，所以后面的三角形的高为：$\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，

所以后面三角形的面积为：$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

两个侧面面积为：$\frac{1}{2}\times2\times3=3$，前面三角形的面积为：$\frac{1}{2}\times4\times\sqrt{(\sqrt{5})^2+2^2}=6$，

四棱锥 P－ABCD 的四个侧面中面积最大的是前面三角形的面积：6.

故选 C.

7.【解答】在菱形 ABCD 中，∠BAD=60，∴△ABD 为正三角形，由＜$\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{BD}$＞=60°，可得＜$\overrightarrow{DE}\overrightarrow{BD}$＞=180°－60°=120°.

∴$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BD}$=2×2×cos60°+1×2×cos120°=2－1=1，

故选 A.

8.【解答】①∵$a_{99}a_{100}-1>0$，∴$a_1^2\cdot q^{197}>1$，∴$(a_1\cdot q^{98})^2>1$.

∵$a_1>1$，∴$q>0$.

又∵$\frac{a_{99}-1}{a_{100}-1}<0$，∴$a_{99}>1$，且 $a_{100}<1$. ∴$0<q<1$，即①正确；

②∵$\begin{cases}a_{99}\cdot a_{101}=a_{100}^2\\0<a_{100}<1\end{cases}$，∴$0<a_{99}\cdot a_{101}<1$，即 $a_{99}\cdot a_{101}-1<0$，故②错误；

③由于 $T_{100}=T_{99}\cdot a_{100}$，而 $0<a_{100}<1$，故有 $T_{100}<T_{99}$，故③错误；

④中 $T_{198}=a_1\cdot a_2\cdots a_{198}=(a_1\cdot a_{198})(a_2\cdot a_{197})\cdots(a_{99}\cdot a_{100})=(a_{99}\cdot a_{100})\times99>1$，

$T_{199}=a_1\cdot a_2\cdots a_{199}=(a_1\cdot a_{199})(a_2\cdot a_{198})\cdots(a_{99}\cdot a_{101})\cdot a_{100}<1$，故④正确.

∴正确的为①④，

故答案为 B.

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9.【解答】二项式 $(2x+\frac{1}{x})^5$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_5^r\cdot(2x)^{5-r}\cdot x^{-r}=2^{5-r}\cdot C_5^r\cdot x^{5-2r}$，

令 5 - 2r=3，r=1，故展开式中 x^3 的系数为 $2^4\cdot C_5^1=80$，

故答案为 80.

10.【解答】∵双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$ 的一条渐近线方程为 $y=\sqrt{3}x$，∴$\frac{b}{1}=\sqrt{3}$，解得 $b=\sqrt{3}$.

故答案为 $\sqrt{3}$.

11.【解答】如图所示，连接 AD.

∵AB 切圆 O 于点 A，AC 为圆 O 的直径，

∴∠BAC=90°，∠ADC=90°.

由射影定理可得 $AC^2=CD\cdot CB$.

∵BD=5，AC=6，∴$6^2=CD\cdot(CD+5)$，

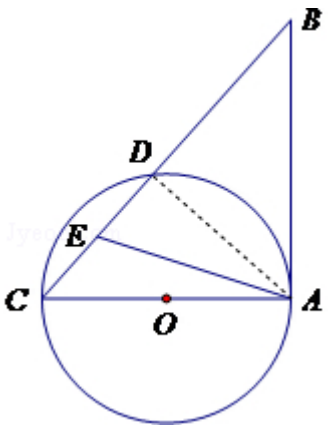
解得 CD=4.

在 Rt△ACD 中，$\cos\angle ACD=\frac{CD}{AC}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

在△ACE 中，由余弦定理可得 $AE^2=CE^2+AC^2-2CE\cdot AC\cos\angle ACE$

$=2^2+6^2-2\times2\times6\times\frac{2}{3}=24$.

∴$AE=2\sqrt{6}$.



12.【解答】若①是 i＜6 时，

∴根据程序框图转化得：

$\cos\frac{\pi}{2}+1+\cos\frac{2\pi}{2}+1+\cos\frac{3\pi}{2}+1+\cos\frac{4\pi}{2}+1+\cos\frac{5\pi}{2}+1+\cos\frac{6\pi}{2}+1=5$.

若①是 i＜2013 时，

∴根据程序框图转化得：

$\cos\frac{\pi}{2}+1+\cos\frac{2\pi}{2}+1+\cos\frac{3\pi}{2}+1+\cos\frac{4\pi}{2}+1+\cos\frac{5\pi}{2}+1+\cdots+\cos\frac{2013\pi}{2}+1$

$=(\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{2\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{4\pi}{2})+(\cos\frac{5\pi}{2}+\cdots+\cos\frac{2012\pi}{2})+\cos\frac{2013\pi}{2}+2013$.

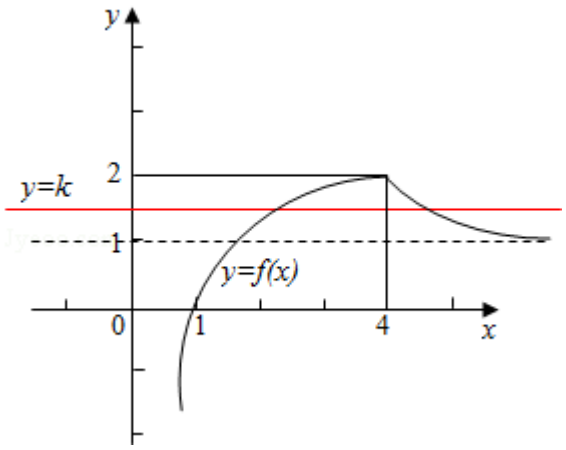
$=\cos\frac{2013\pi}{2}+2013=2013$.

故答案为：5；2013.

13.【解答】关于 x 的方程 f（x）=k 有两个不同的实根，

等价于函数 f（x）与函数 y=k 的图象有两个不同的交点，

作出函数的图象如下：



由图可知实数 k 的取值范围是（1，2）

故答案为：（1，2）

14.【解答】由题意设动点坐标为（x，y），则利用题意及点到直线间的距离公式的得：$|x+1||y-1|=k^2$，

对于①，将（－1，1）代入验证，此方程不过此点，所以①错；

对于②，把方程中的 x 被－2－x 代换，y 被 2－y 代换，方程不变，故此曲线关于（－1，1）对称．②正确；

对于③，由题意知点 P 在曲线 C 上，点 A，B 分别在直线 l_1，l_2 上，则$|PA|\geqslant|x+1|$，$|PB|\geqslant|y-1|$

∴$|PA|+|PB|\geqslant2\sqrt{|PA||PB|}=2k$，③正确；

对于④，由题意知点 P 在曲线 C 上，根据对称性，

则四边形 $P_0P_1P_2P_3$ 的面积$=2|x+1|\times2|y-1|=4|x+1||y-1|=4k^2$．所以④正确．

故答案为：②③④.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

15.【解答】（Ⅰ）∵函数 f（x）=sin（π－2x）+2$\sqrt{3}$cos^{2}x=sin2x+$\sqrt{3}$cos2x+$\sqrt{3}$=2sin（2x+$\frac{\pi}{3}$）+$\sqrt{3}$，…（4 分）

∴f（$\frac{\pi}{6}$）=2sin$\frac{2\pi}{3}$+$\sqrt{3}$=2×$\frac{\sqrt{3}}{2}$+$\sqrt{2}$=2$\sqrt{3}$…（6 分）

（Ⅱ）f（x）=2sin（2x+$\frac{\pi}{3}$）+$\sqrt{3}$，∴它的最小正周期 T=$\frac{2\pi}{2}$=π．…（8 分）

又由 2kπ－$\frac{\pi}{2}$≤2x+$\frac{\pi}{3}$≤2kπ+$\frac{\pi}{2}$，k∈z，求得 kπ－$\frac{5\pi}{12}$≤x≤kπ+$\frac{\pi}{12}$，k∈z，

可得函数 f（x）的单调递增区间为[kπ－$\frac{5\pi}{12}$，kπ+$\frac{\pi}{12}$]，k∈z．…（13 分）

16.【解答】（Ⅰ）连结 AC∩BD=F，

ABCD 为正方形，F 为 AC 中点，E 为 PC 中点．

∴在△CPA 中，EF∥PA…（2 分）

且 PA⊂平面 PAD，EF⊄平面 PAD∴EF∥平面 PAD…（4 分）

（Ⅱ）因为平面 PAD⊥平面 ABCD，平面 PAD∩面 ABCD=AD

ABCD 为正方形，CD⊥AD，CD⊂平面 ABCD

所以 CD⊥平面 PAD．

∴CD⊥PA…（6 分）

又 PA=PD=$\frac{\sqrt{2}}{2}$AD，所以△PAD 是等腰直角三角形，

且∠APD=90°　　即 PA⊥PD

CD∩PD=D，且 CD、PD⊂面 PDC

∴PA⊥面 PDC

又 PA⊂面 PAB，

∴面 PAB⊥面 PDC．….．（9 分）

（Ⅲ） 如图，取 AD 的中点 O，连结 OP，OF．

∵PA=PD，∴PO⊥AD．

∵侧面 PAD⊥底面 ABCD，

面 PAD⊥面 ABCD，

∴PO⊥面 ABCD，

而 O，F 分别为 AD，BD 的中点，∴OF∥AB，

又 ABCD 是正方形，故 OF⊥AD．

∵PA=PD=$\frac{\sqrt{2}}{2}$AD，∴PA⊥PD，OP=OA=1.

以O为原点，直线OA，OF，OP分别为x，y，z轴建立空间直角坐标系，

则有A（1，0，0），F（0，1，0），D（－1，0，0），P（0，0，1）.

若在AB上存在点G，使得二面角C－PD－G的余弦值为$\frac{1}{3}$，

连结PG，DG

设G（1，a，0）（0≤a≤2）.

由（Ⅱ）知平面PDC的法向量为$\overrightarrow{PA}$=（1，0，－1）.

设平面PGD的法向量为$\vec{n}$=（x，y，z）.

∵$\overrightarrow{DP}$=（1，0，1），$\overrightarrow{GD}$=（－2，－a，0），

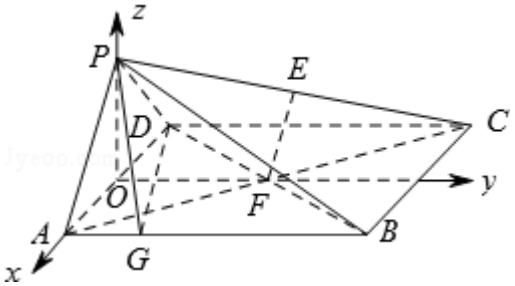
∴由$\vec{n}\cdot\overrightarrow{DP}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{GD}=0$可得$\begin{cases}x+z=0\\-2x-ay=0\end{cases}$，令x=1，则y=－$\frac{2}{a}$，z=－1，

故$\vec{n}$=（1，－$\frac{2}{a}$，－1），

∴$\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{PA}\rangle=\frac{2}{\sqrt{2}\times\sqrt{2+\frac{4}{a^2}}}=\frac{1}{3}$，

解得，a=$\frac{1}{2}$.

所以，在线段AB上存在点G（1，$\frac{1}{2}$，0），使得二面角C－PD－G的余弦值为$\frac{1}{3}$. …（14分）



17.【解答】（Ⅰ）记$\overline{X}$表示这40位市民满意指数的平均值，则$\overline{X}=\frac{1}{40}(90\times15+60\times17+30\times6+0\times2)$=63.75.

（Ⅱ）ξ的可能取值为0、1、2、3.

设满意级别为“非常满意或满意”为事件M，则P（M）=$\frac{15+17}{40}=\frac{4}{5}$，可知ξ～B$(3,\frac{4}{5})$.

∴P（ξ=i）=$C_3^i(\frac{4}{5})^i(\frac{1}{5})^{3-i}$，i=0，1，2，3.

∴ξ的分布列为

ξ	0	1	2	3
P	$\frac{1}{125}$	$\frac{12}{125}$	$\frac{48}{125}$	$\frac{64}{125}$

（Ⅲ）设所有满足条件 n≥m+60 的事件为 A.

①满足 m=0 且 n=60 的事件数为：$A_2^1A_{17}^1=34$.

②满足 m=0 且 n=90 的事件数为：$A_2^1A_{15}^1=30$.

③满足 m=30 且 n=90 的事件数为：$A_6^1A_{15}^1=90$.

∴P（A）=$\frac{34+30+90}{A_{40}^2}=\frac{77}{780}$.

所以满足条件 n≥m+60 的事件的概率为$\frac{77}{780}$.

18.【解答】（I）当 a=2 时，f（x）=$\frac{1}{2}x^2-2\ln x$，f′（x）=x-$\frac{2}{x}$，

∴f′（1）=-1，f（1）=$\frac{1}{2}$，

故 f（x）在（1，f（1））处的切线方程为：y-$\frac{1}{2}$=-（x-1）

化为一般式可得 2x+2y-3=0…..（3 分）

（Ⅱ）求导数可得 f′（x）=x-$\frac{a}{x}=\frac{x^2-a}{x}$

由 a>0 及定义域为（0，+∞），令 f′（x）=0，解得 x=$\sqrt{a}$，

①若$\sqrt{a}\leqslant 1$，即 0<a≤1，在（1，e）上，f′（x）>0，f（x）在[1，e]上单调递增，

因此，f（x）在区间[1，e]的最小值为 f（1）=$\frac{1}{2}$.

②若 1<$\sqrt{a}$<e，即 1<a<e^2，在（1，$\sqrt{a}$）上，f′（x）<0，f（x）单调递减；

在（$\sqrt{a}$，e）上，f′（x）>0，f（x）单调递增，因此 f（x）在区间[1，e]上的最小值为 f（$\sqrt{a}$）=$\frac{1}{2}a(1-\ln a)$，

③若$\sqrt{a}\geqslant e$，即 a≥e^2在（1，e 上，f′（x）<0，f（x）在[1，e]上单调递减，

因此，f（x）在区间[1，e]上的最小值为 f（e）=$\frac{1}{2}e^2-a$.

综上，当 0<a≤1 时，f_{min}（x）=$\frac{1}{2}$；当 1<a<e^2时，f_{min}（x）=$\frac{1}{2}a(1-\ln a)$；

当 a≥e^2时，f_{min}（x）=$\frac{1}{2}e^2-a$. ….（9 分）

（Ⅲ） 由（Ⅱ）可知当 0<a≤1 或 a≥e^2时，f（x）在（1，e）上是单调递增或递减函数，不可能存在两个零点.

当 1<a<e^2时，要使 f（x）在区间（1，e）上恰有两个零点，则

$\begin{cases}\frac{1}{2}a(1-\ln a)<0\\ f(1)=\frac{1}{2}>0\\ f(e)=\frac{1}{2}e^2-a>0\end{cases}$ 即$\begin{cases}a>e\\ a<\frac{1}{2}e^2\end{cases}$，此时，e<a<$\frac{1}{2}e^2$.

所以，a 的取值范围为（e，$\frac{1}{2}e^2$）…..（13 分）

19.【解答】（Ⅰ）易知 A（－a，0），B（a，0），F_1（－c，0），

∴$\overrightarrow{AF_1}\cdot\overrightarrow{F_1B}=(a-c,\ 0)\cdot(a+c)=1$，∴$a^2-c^2=b^2=1$，

又 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-1}{a^2}=\frac{3}{4}$，解得 $a^2=4$，

∴所求椭圆方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$；

（Ⅱ）设 P（x_0，y_0），则 Q（x_0，$2y_0$）（$x_0\neq\pm2$），

∴$k_{AQ}=\frac{2y_0}{x_0+2}$，所以直线 AQ 方程：$y=\frac{2y_0}{x_0+2}(x+2)$，

∴$M(2,\ \frac{8y_0}{x_0+2})$，则$N(2,\ \frac{4y_0}{x_0+2})$，

∴$k_{QN}=\frac{\frac{4y_0}{x_0+2}-2y_0}{2-x_0}=\frac{2x_0y_0}{x_0^2-4}$，

又点 P 的坐标满足椭圆方程，则 $x_0^2+4y_0^2=4$，

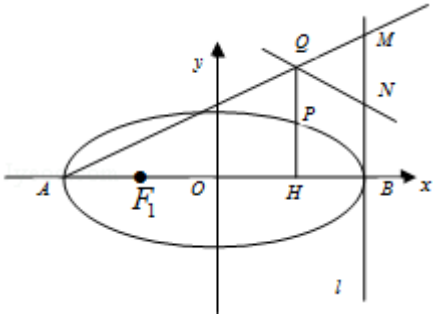
所以 $x_0^2-4=-4y_0^2$，∴$k_{QN}=\frac{2x_0y_0}{x_0^2-4}=\frac{2x_0y_0}{-4y_0^2}=-\frac{x_0}{2y_0}$，

∴直线 QN 的方程：$y-2y_0=-\frac{x_0}{2y_0}(x-x_0)$，

化简整理得到：$x_0x+2y_0y=x_0^2+4y_0^2=4$，即 $x_0x+2y_0y=4$，

所以点 O 到直线 QN 的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{x_0^2+4y_0^2}}=2$，

故直线 QN 与 AB 为直径的圆 O 相切.



20.【解答】（1）当 k=0，b=3，p=－4 时，$3(a_1+a_n)-4=2(a_1+a_2\cdots+a_n)$，①

用 n+1 去代 n 得，$3(a_1+a_{n+1})-4=2(a_1+a_2\cdots+a_n+a_{n+1})$，②

②－①得，$3(a_{n+1}-a_n)=2a_{n+1}$，$a_{n+1}=3a_n$，（2 分）

在①中令 n=1 得，$a_1=1$，则 $a_n\neq 0$，$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n}=3$，

∴数列$\{a_n\}$是以首项为 1，公比为 3 的等比数列，

$\therefore a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\frac{3^n-1}{2}$.（4 分）

（2）当 k=1，b=0，p=0 时，$n(a_1+a_n)=2(a_1+a_2\cdots+a_n)$，③

用 n+1 去代 n 得，$(n+1)(a_1+a_{n+1})=2(a_1+a_2\cdots+a_n+a_{n+1})$，④

④－③得，$(n-1)a_{n+1}-na_n+a_1=0$，⑤（6 分）

用 n+1 去代 n 得，$na_{n+2}-(n+1)a_{n+1}+a_1=0$，⑥

⑥－⑤得，$na_{n+2}-2na_{n+1}+na_n=0$，即 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，（8 分）

∴数列$\{a_n\}$是等差数列.

∵$a_3=3$，$a_9=15$，∴公差 $d=\frac{a_9-a_3}{9-3}=2$，∴$a_n=2n-3$.（10 分）

（3）由（2）知数列$\{a_n\}$是等差数列，∵$a_2-a_1=2$，∴$a_n=a_1+2(n-1)$.

又$\{a_n\}$是“封闭数列”，得：对任意 m，$n\in N^*$，必存在 $p\in N^*$使 $a_1+2(n-1)+a_1+2(m-1)=a_1+2(p-1)$，

得 $a_1=2(p-m-n+1)$，故 a_1是偶数，（12 分）

又由已知，$\frac{1}{12}<\frac{1}{S_1}<\frac{11}{18}$，故$\frac{18}{11}<a_1<12$.

一方面，当$\frac{18}{11}<a_1<12$时，$S_n=n(n+a_1-1)>0$，对任意 $n\in N^*$，都有$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}\geqslant\frac{1}{S_1}>\frac{1}{12}$.

另一方面，当 $a_1=2$ 时，$S_n=n(n+1)$，$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，则$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=1-\frac{1}{n+1}$，

取 n=2，则$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>\frac{11}{18}$，不合题意.（14 分）

当 $a_1=4$ 时，$S_n=n(n+3)$，$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3})$，则$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}=\frac{11}{18}-\frac{1}{3}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3})<\frac{11}{18}$，

当 $a_1\geqslant 6$ 时，$S_n=n(n+a_1-1)>n(n+3)$，$\frac{1}{S_n}<\frac{1}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+3})$，

$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{11}{18}-\frac{1}{3}(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3})<\frac{11}{18}$，

又$\frac{18}{11}<a_1<12$，

∴$a_1=4$ 或 $a_1=6$ 或 $a_1=8$ 或 $a_1=10$.（16 分）