2013 北京昌平高三二模

数　　学（文）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1.（5 分）i 是虚数单位，则复数 $z=\frac{2i-1}{i}$在复平面内对应的点在（　　）

A．第一象限 B．第二象限 C．第三象限 D．第四象限

2.（5 分）已知集合 A={x|2^x＞1}，B={x|x＜1}，则 A∩B=（　　）

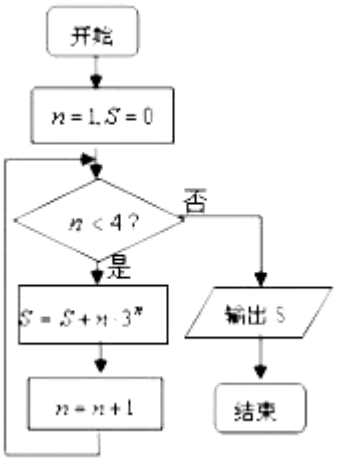
A．{x|x＞1} B．{x|x＞0} C．{x|0＜x＜1} D．{x|x＜1}

3.（5 分）已知命题 p：∀x∈R，x≥2，那么下列结论正确的是（　　）

A．命题¬p：∀x∈R，x≤2 B．命题¬p：∃x∈R，x＜2

C．命题¬p：∀x∈R，x≤－2 D．命题¬p：∃x∈R，x＜－2

4.（5 分）执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为（　　）

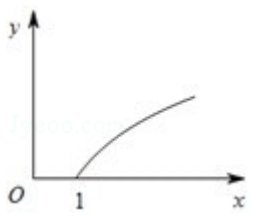


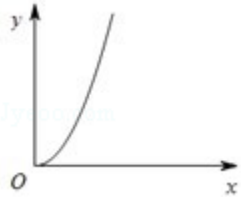
A．102 B．81 C．39 D．21

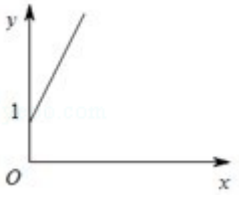
5.（5 分）在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$上随机取一个数 x，则事件“tanxcosx≥$\frac{\sqrt{2}}{2}$”发生的概率为（　　）

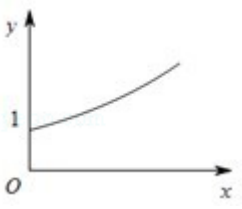
A．$\frac{3}{4}$ B．$\frac{2}{3}$ C．$\frac{1}{2}$ D．$\frac{1}{3}$

6.（5 分）某地区的绿化面积每年平均比上一年增长 18%，经过 x 年，绿化面积与原绿化面积之比为 y，则 y=f（x）的图象大致为（　　）

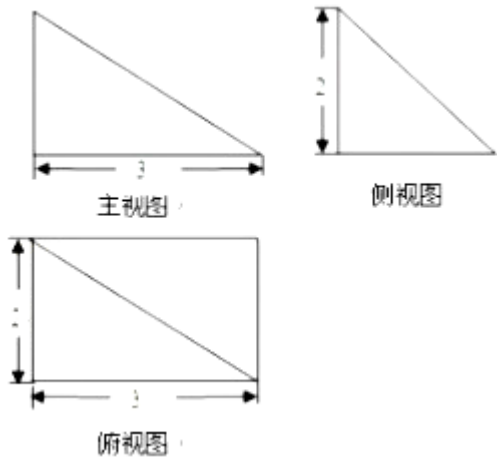
A. 

B. 

C. 

D. 

7.（5 分）已知四棱锥 P－ABCD 的三视图如图所示，则此四棱锥的四个侧面的面积中最大的是（　　）



A．2　　B．3　　C．$\sqrt{13}$　D．$3\sqrt{2}$

8．（5 分）定义一种新运算：a•b=$\begin{cases} b, & (a\geqslant b) \\ a, & (a<b) \end{cases}$已知函数 f（x）=（1+$\frac{4}{x}$）•$\log_2 x$，若函数 g（x）=f（x）－k 恰有两个零点，则 k 的取值范围为（　　）

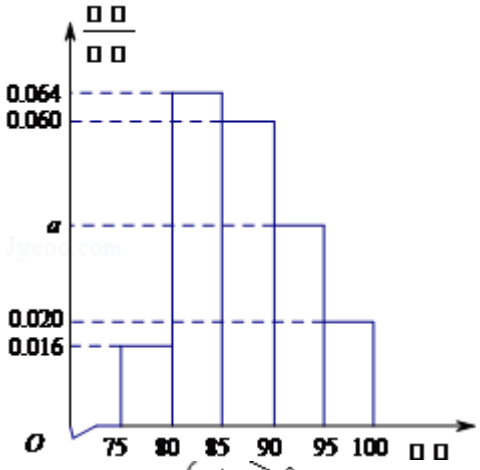
A．（1，2］　B．（1，2）　C．（0，2）　D．（0，1）

二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9．（5 分）在△ABC 中，若 a=4，b=5，c=$\sqrt{61}$，则∠C 的大小为_____.

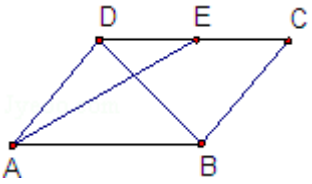
10．（5 分）双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的一条渐近线方程为 y=$\sqrt{3}$x，则 b=_____.

11．（5 分）某高校在 2013 年的自主招生考试成绩中随机抽取 50 名学生的笔试成绩，绘制成频率分布直方图如图所示，由图中数据可知 a=_____；若要从成绩在[85，90），[90，95），[95，100]三组内的学生中，用分层抽样的方法选取 12 人参加面试，则成绩在[95，100]内的学生中，学生甲被选取的概率为_____.



12．（5 分）设$\begin{cases} x+y\geqslant 0 \\ x-y\geqslant 0 \end{cases}$与抛物线 $y^2=-4x$ 的准线围成的三角形区域（包含边界）为 D，P（x，y）为 D 内的一个动点，则目标函数 z=x－2y 的最大值为_____.

13．（5 分）如图，在边长为 2 的菱形 ABCD 中，∠BAD=60°，E 为 CD 的中点，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$=_____.



14.（5 分）对于三次函数 f（x）=ax^3+bx^2+cx+d（$a\neq0$），给出定义：设 f′（x）是函数 y=f（x）的导数，f″（x）是函数 f′（x）的导数，若方程 f″（x）=0 有实数解 x_0，则称（x_0，f（x_0））为函数 y=f（x）的“拐点”．某同学经过探究发现：任何一个三次函数都有“拐点”；任何一个三次函数都有对称中心，且“拐点”就是对称中心．给定函数$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$，请你根据上面探究结果，解答以下问题

（1）函数 f（x）=$\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$的对称中心为_____；

（2）计算 $f(\frac{1}{2013})+f(\frac{2}{2013})+f(\frac{3}{2013})+\cdots+f(\frac{2012}{2013})$=_____．

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤．）

15.（13 分）已知 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $a_3=S_3=9$

（Ⅰ）求$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）若等比数列$\{b_n\}$满足 $b_1=a_2$，$b_4=S_4$，求$\{b_n\}$的前 n 项和公式．

16.（13 分）已知函数 f（x）=$\sqrt{3}\sin(\pi-2x)-2\cos^2x+1$，$x\in R$．

（Ⅰ）求 f（$\frac{\pi}{2}$）；

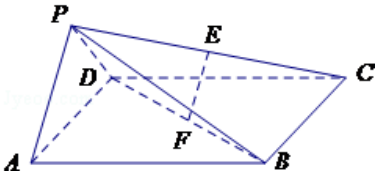
（Ⅱ）求 f（x）的最小正周期及单调递增区间．

17.（14 分）如图，在四棱锥 P－ABCD 中，底面 ABCD 是正方形，侧面 PAD⊥底面 ABCD，且 PA=PD=$\frac{\sqrt{2}}{2}$AD=2，E、F 分别为 PC、BD 的中点．

（Ⅰ） 求证：EF∥平面 PAD；

（Ⅱ） 求三棱锥 P－BCD 的体积；

（Ⅲ） 在线段 AB 上是否存在点 G，使得 CD⊥平面 EFG？说明理由．



18.（13 分）已知函数 f（x）=$\frac{1}{2}x^2-a\ln x(a>0)$

（Ⅰ）若 f（x）在 x=2 处的切线与直线 3x－2y+1=0 平行，求 f（x）的单调区间；

（Ⅱ）求 f（x）在区间[1，e]上的最小值．

19.（13 分）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$且过点（0，1）．

（Ⅰ）求此椭圆的方程；

（Ⅱ）已知定点 E（－1，0），直线 y=kx+2 与此椭圆交于 C、D 两点．是否存在实数 k，使得以线段 CD 为直径的圆过 E 点．如果存在，求出 k 的值；如果不存在，请说明理由．

20.（14 分）如果函数 y=f（x）的定义域为 R，对于定义域内的任意 x，存在实数 a 使得 f（x+a）=f（－x）成立，则称此函数具有“P（a）性质”．

（I）判断函数 y=sinx 是否具有“P（a）性质”，若具有“P（a）性质”，求出所有 a 的值；若不具有“P（a）性质”，请说明理由；

（II）设函数 y=g（x）具有“P（±1）性质”，且当 $-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 时，g（x）=|x|．若 y=g（x）与 y=mx 交点个数为 2013 个，求 m 的值．

参考答案

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.）

1.【解答】∵复数 $z=\frac{2i-1}{i}=\frac{-i(2i-1)}{-i^2}=2+i$ 在复平面内对应的点为（2，1），

而（2，1）在第一象限内，

故选 A.

2.【解答】∵集合 $B=\{x|2^x>1\}=(0,+\infty)$，

又 $B=\{x|x<1\}$，

故 $A\cap B=\{x|0<x<1\}$

故选 C.

3.【解答】由题意 p：$\forall x\in R$，$x\geqslant 2$，

∴¬p：$\exists x\in R$，$x<2$，

故选 B.

4.【解答】按照程序框图依次执行为 $S=0+1\times 3^1=3$，n=2；

$S=3+2\cdot 3^2=21$，n=3；

$S=21+3\times 3^3=102$，n=4；

此时 n=4，不满足 n＜4，退出循环，输出 S=102.

故选 A.

5.【解答】∵$\tan x\cdot\cos x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$且 $\cos x\neq 0$，

∵$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，∴$x\in[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，

∴在区间 $(0,\frac{\pi}{2})$内，满足 $\tan x\cdot\cos x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$发生的概率为 $P=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{1}{2}$.

故选 C.

6.【解答】设某地区起始年的绿化面积为 a，

∵该地区的绿化面积每年平均比上一年增长 18%，

∴经过 x 年，绿化面积 g（x）=a（1+18%）^{x}，

∵绿化面积与原绿化面积之比为 y，则 y=f（x）=$\frac{g(x)}{a}$=（1+18%）^{x}=1.18^{x}，

∵y=1.18^{x}为底数大于 1 的指数函数，故可排除 C，

当 x=0 时，y=1，可排除 A，B；

故选 D.

7.【解答】因为三视图复原的几何体是四棱锥，顶点在底面的射影是底面矩形的一个顶点，底面边长分别为 3，2，

后面是直角三角形，直角边为 3 与 2，所以后面的三角形的高为：$\frac{1}{2}\times 3\times 2=3$，

右面三角形是直角三角形，直角边长为：2，2，三角形的面积为：$\frac{1}{2}\times 2\times 2=2$.

前面三角形是直角三角形，直角边长为：3，$2\sqrt{2}$，其面积为：$\frac{1}{2}\times 3\times 2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$，

前左面也是直角三角形，直角边长为 2，$\sqrt{13}$，三角形的面积为：$\frac{1}{2}\times 2\times \sqrt{13}=\sqrt{13}$，

四棱锥 P－ABCD 的四个侧面中面积最大的是前面三角形的面积：$3\sqrt{2}$.

故选 D.

8.【解答】令 1+$\frac{4}{x}$=log$_2$x，可解得 x=4，此时函数值为 2，

而且当 0＜x≤4 时，1+$\frac{4}{x}$≥log$_2$x，当 x＞4 时 1+$\frac{4}{x}$＜log$_2$x，

故 f（x）=（1+$\frac{4}{x}$）•log$_2$x=$\begin{cases}1+\frac{4}{x}, & x>4\\ \log_2 x, & 0<x\leqslant 4\end{cases}$，

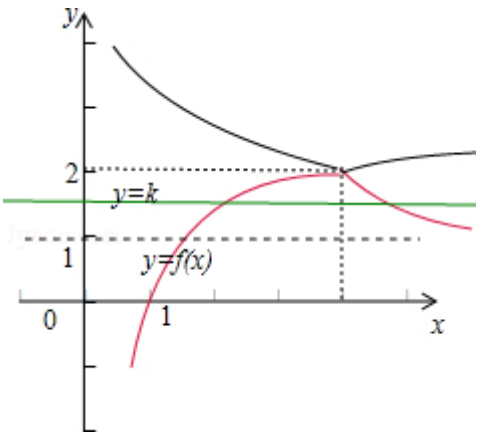
函数 g（x）=f（x）－k 恰有两个零点等价于

函数 f（x）与 y=k 的图象有两个交点，

作出函数的图象：

由图象可知，k 的取值范围为（1，2）

故选 B



二、填空题（本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分）

9.【解答】∵在△ABC 中，若 a=4，b=5，c=$\sqrt{61}$，则由余弦定理可得 cosC=$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{16+25-61}{40}=-\frac{1}{2}$，

故∠C=120°，

故答案为 120°．

10.【解答】∵双曲线 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1(b>0)$的一条渐近线方程为 y=$\sqrt{3}$x，∴$\frac{b}{1}=\sqrt{3}$，解得 b=$\sqrt{3}$.

故答案为$\sqrt{3}$.

11.【解答】由频率分步直方图知，

（0.016+0.064+0.06+a+0.02）×5=1，

∴a=0.040.

第 3 组的人数为 0.060×5×50=15，

第 4 组的人数为 0.040×5×50=10．…（2 分）

第 5 组的人数为 0.020×5×50=5，

因为第 3、4、5 组共抽 30 名学生，

所以利用分层抽样在 30 名学生中抽取 12 名学生（3 分）

每组抽取的人数分别为：

第 3 组：$\frac{15}{30}$×12=6，

第 4 组：$\frac{10}{30}$×12=4，

第 5 组：$\frac{5}{30}$×12=2，

所以第 3、4、5 组分别抽取 6 人、4 人、2 人．…（5 分）

则成绩在[95，100]内的5个学生中抽2个，学生甲被选取的概率为 $\frac{2}{5}$.

故答案为：0.040；$\frac{2}{5}$.

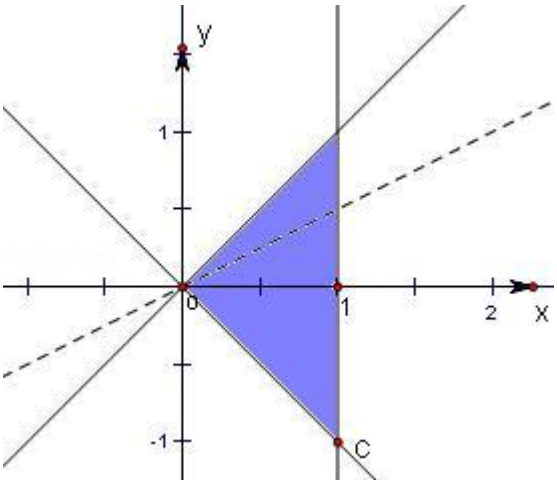
12.【解答】由题意，抛物线 $y^2=-4x$ 的准线 x=1，它和不等式 $\begin{cases}x-y>0\\x+y>0\end{cases}$ 共同围成的三角形区域为 $\begin{cases}x-y\geqslant 0\\x+y\geqslant 0\\x\leqslant 1\end{cases}$，

目标函数为 z=x－2y+5，作出可行域如右图，

由图象可知当直线经过点C时，直线 z=x－2y+5 的截距最小，此时 z 最大，

点C的坐标为（1，－1），此时 z=1－2×（－1）=3.

故答案为：3.



13.【解答】在菱形ABCD中，∠BAD=60，∴△ABD为正三角形，$<\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BD}>=60°$，$<\overrightarrow{DE},\overrightarrow{BD}>=180°-60°=120°$

∵ $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}$，∴ $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE})\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{BD}=2\times2\times\cos60°+1\times2\times\cos120°=2-1=1$

故答案为：1.

14.【解答】（1）∵ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$，

∴ $f'(x)=x^2-x+3$，$f''(x)=2x-1$，

令 $f''(x)=2x-1=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，

∵ $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{3}\times(\frac{1}{2})^3-\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2})^2-\frac{5}{12}+3\times\frac{1}{2}=1$，

∴ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$ 的对称中心为 $(\frac{1}{2},1)$，

（2）∵ $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{12}$ 的对称中心为 $(\frac{1}{2},1)$，

∴ $f(x)+f(1-x)=2$，

∴ $f(\frac{1}{2013})+f(\frac{2}{2013})+f(\frac{3}{2013})+\cdots+f(\frac{2012}{2013})=2\times1006=2012$.

故答案为：$(\frac{1}{2},1)$，2012.

三、解答题（本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.）

15.【解答】（Ⅰ）设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d.

因为 $a_3=S_3=9$，

所以$\begin{cases}a_1+2d=9\\3a_1+3d=9\end{cases}$，解得 $a_1=-3$，$d=6$，

所以 $a_n=-3+(n-1)\cdot6=6n-9$；

（II）设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

因为 $b_1=a_2=-3+6=3$，$b_4=S_4=4\times(-3)+\frac{4\times3}{2}\times6=24$，

所以 $3q^3=24$，解得 $q=2$，

所以$\{b_n\}$的前 n 项和公式为$T_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q}=3(2^n-1)$.

16.【解答】（Ⅰ）∵函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin(\pi-2x)-2\cos^2x+1=\sqrt{3}\sin2x-\cos2x=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$，…..（4 分）

∴$f(\frac{\pi}{2})=2\sin(2\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})=2\times\frac{1}{2}=1$.（6 分）

（Ⅱ）函数 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{6})$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，…（8 分）

又由 $2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant2x-\frac{\pi}{6}\leqslant2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in z$，解得 $k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}$，

故函数的单调递增区间为$[k\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{3}]$，$k\in z$．…（13 分）

17.【解答】（Ⅰ）证明：连接 AC 交 BD 于 F，

∵ABCD 为正方形，∴F 为 AC 中点，

∵E 为 PC 中点.

∴在△CPA 中，EF∥AP.

又 PA⊂平面 PAD，EF⊄平面 PAD，

∴EF∥平面 PAD；

（Ⅱ）解：如图，取 AD 的中点 O，连接 OP.

∵PA=AD，∴PO⊥AD.

∵侧面 PAD⊥底面 ABCD，侧面 PAD∩底面 ABCD=AD，

∴PO⊥平面 ABCD.

又且 PA=PD=$\frac{\sqrt{2}}{2}$AD=2，∴△PAD 是等腰直角三角形，

且 AD=$2\sqrt{2}$，PO=$\frac{1}{2}$AD=$\sqrt{2}$.

在正方形 ABCD 中，$S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\times AD^2=\frac{1}{2}\times(2\sqrt{2})^2=4$.

∴$V_{P-BCD}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCD}\times PO=\frac{1}{3}\times4\times\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

（3）存在点 G 满足条件，证明如下：

设点 G 为 AB 中点，连接 EG、FG.

由 F 为 BD 的中点，∴FG∥AD，

由（I）得 EF∥PA，且 FG∩EF=F，AD∩PA=A，

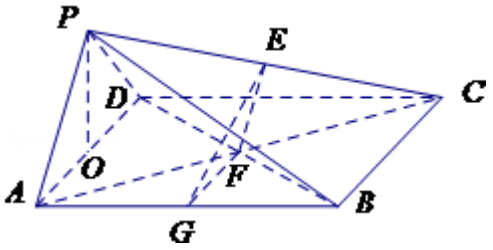
∴平面 EFG∥平面 PAD.

∵侧面 PAD⊥底面 ABCD，平面 PAD∩平面 ABCD=AD，AD⊥CD，

∴CD⊥平面 PAD.

∴CD⊥平面 EFG.

所以 AB 的中点 G 为满足条件的点.



18.【解答】（I）f（x）的定义域为（0，+∞），f′（x）=x-$\frac{a}{x}$=$\frac{x^2-a}{x}$

由 f（x）在 x=2 处的切线与直线 3x-2y+1=0 平行，则 f′（2）=$\frac{4-a}{2}$=$\frac{3}{2}$，a=1….（4 分）

此时 f（x）=$\frac{1}{2}x^2$-lnx，f′（x）=$\frac{x^2-1}{x}$

令 f′（x）=0 得 x=1

f（x）与 f′（x）的情况如下：

x	（0，1）	1	（1，+∞）
f′（x）	-	0	+

f（x）	↘	$\frac{1}{2}$	↗

所以，f（x）的单调递减区间是（0，1），单调递增区间是（1，+∞）…（7 分）

（II）由 f′（x）=$\frac{x^2-a}{x}$

由 a＞0 及定义域为（0，+∞），令 f′（x）=0 得 x=$\sqrt{a}$

①若$\sqrt{a}$≤1 即 0＜a≤1 在（1，e）上，f′（x）＞0，

f（x）在[1，e]上单调递增，f（x）$_{min}$=f（1）=$\frac{1}{2}$；

②若 1＜$\sqrt{a}$＜e，即 1＜a＜e^2在（1，$\sqrt{a}$）上，f′（x）＜0，f（x）单调递减；在（$\sqrt{a}$，e）上，f′（x）＞0，

f（x）单调递增，因此在[1，e]上，f（x）$_{min}$=f（$\sqrt{a}$）=$\frac{1}{2}$a（1－lna）；

③若$\sqrt{a}$≥e，即 a≥e^2在（1，e）上，f′（x）＜0，

f（x）在[1，e]上单调递减，f（x）$_{min}$=f（e）=$\frac{1}{2}e^2$－a

综上，当 0＜a≤1 时，f（x）$_{min}$=$\frac{1}{2}$；当 1＜$\sqrt{a}$＜e 时，f（x）$_{min}$=$\frac{1}{2}$a（1－lna）；当 a≥e^2时，f（x）$_{min}$=$\frac{1}{2}e^2$－a…..

（13 分）

19.【解答】（I）根据题意，$\begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3}\\ a^2=b^2+c^2\\ b=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}a^2=3\\ b^2=1\\ c^2=2\end{cases}$.

∴椭圆方程为$\frac{x^2}{3}+y^2=1$.

（II）将 y=kx+2 代入椭圆方程，得（1+3k^2）x^2+12kx+9=0，

由直线与椭圆有两个交点，∴△=（12k）^{2}－36（1+3k^2）＞0，解得 k^2＞1.（*）

设 C（x_1，y_1），D（x_2，y_2），则 $x_1+x_2=\frac{-12k}{1+3k^2}$，$x_1x_2=\frac{9}{1+3k^2}$，（**）

若以 CD 为直径的圆过 E 点，则$\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=0$，即（$x_1$+1）（$x_2$+1）+$y_1y_2$=0，

而 y_1y_2=（kx_1+2）（kx_2+2）=$k^2x_1x_2$+2k（x_1+x_2）+4，代入上式得

$(x_1+1)(x_2+1)+k^2x_1x_2+2k(x_1+x_2)+4=0$，

化为（k^2+1）x_1x_2+（2k+1）（x_1+x_2）+5=0.

把（**）代入上式得$\frac{9k^2}{1+3k^2}-\frac{12k(2k+1)}{1+3k^2}+5=0$

解得 k=$\frac{7}{6}$，满足 k^2＞1.

所以存在 k=$\frac{7}{6}$使得以线段 CD 为直径的圆过 E 点.

20.【解答】（I）由 sin（x+a）=sin（﹣x）得 sin（x+a）=﹣sinx，

根据诱导公式得 a=2kπ+π（k∈Z）.

∴y=sinx 具有“P（a）性质”，其中 a=2kπ+π（k∈Z）.…（4 分）

（II）∵y=g（x）具有“P（±1）性质”，

∴g（1+x）=g（﹣x），g（﹣1+x）=g（﹣x），

∴g（x+2）=g（1+1+x）=g（﹣1﹣x）=g（x），从而得到 y=g（x）是以 2 为周期的函数.

又设$\frac{1}{2}$≤x≤$\frac{3}{2}$，则﹣$\frac{1}{2}$≤1﹣x≤$\frac{1}{2}$，

g（x）=g（x﹣2）=g（﹣1+x﹣1）=g（﹣x+1）=|﹣x+1|=|x﹣1|=g（x﹣1）.

再设 n﹣$\frac{1}{2}$≤x≤n+$\frac{1}{2}$（n∈z），

当 n=2k（k∈z），2k﹣$\frac{1}{2}$≤x≤2k+$\frac{1}{2}$，则﹣$\frac{1}{2}$≤x﹣2k≤$\frac{1}{2}$，

g（x）=g（x﹣2k）=|x﹣2k|=|x﹣n|；

当 n=2k+1（k∈z），2k+1﹣$\frac{1}{2}$≤x≤2k+1+$\frac{1}{2}$，则$\frac{1}{2}$≤x﹣2k≤$\frac{3}{2}$，

g（x）=g（x﹣2k）=|x﹣2k﹣1|=|x﹣n|；

∴对于，n﹣$\frac{1}{2}$≤x≤n+$\frac{1}{2}$（n∈z），都有 g（x）=|x﹣n|，而 n+1﹣$\frac{1}{2}$≤x+1≤n+1+$\frac{1}{2}$，

∴g（x+1）=|（x+1）﹣（n+1）|=|x﹣n|=g（x），

∴y=g（x）是周期为 1 的函数.

①当 m＞0 时，要使 y=mx 与 y=g（x）有 2013 个交点，只要 y=mx 与 y=g（x）在[0，1006）有 2012 个交点，而在[1006，1007]有一个交点.

∴y=mx 过（$\frac{2013}{2}$，$\frac{1}{2}$），从而得 m=$\frac{1}{2013}$

②当 m＜0 时，同理可得 m=﹣$\frac{1}{2013}$

③当 m=0 时，不合题意.

综上所述 m=±$\frac{1}{2013}$…（14 分）