2013 北京丰台高三二模

数　　学（文）

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.（5 分）复数 i（3+4i）的虚部为（　　）

A. 3　　B. 3i　　C. 4　　D. 4i

2.（5 分）若 a∈R，则“a=1”是“|a|=1”的（　　）

A. 充分而不必要条件　B. 必要而不充分条件

C. 充要条件　D. 既不充分又不必要条件

3.（5 分）设向量 $\vec{a}$=（4，x），$\vec{b}$=（2，－1），且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 x 的值是（　　）

A. 8　　B. －8　C. 2　　D. －2

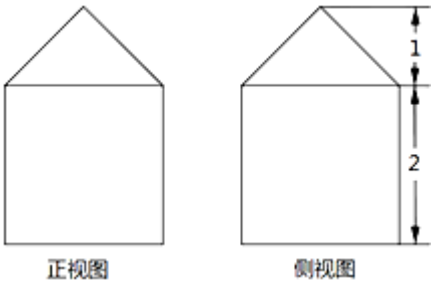
4.（5 分）双曲线 $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$ 的离心率为（　　）

A. $\frac{\sqrt{13}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{13}}{3}$　C. $\frac{\sqrt{10}}{2}$　D. $\frac{\sqrt{10}}{3}$

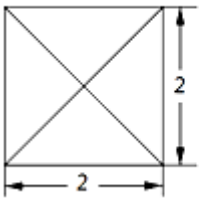
5.（5 分）下列四个函数中，最小正周期为 π，且图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称的是（　　）

A. $y=\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3})$　B. $y=\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$　C. $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　D. $y=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

6.（5 分）某几何体的三视图如图所示，则该几何体的表面积为（　　）



正视图　　侧视图



俯视图

A. 24　　B. $20+4\sqrt{2}$　C. 28　　D. $24+4\sqrt{2}$

7.（5 分）在平面区域 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 2\\0\leqslant y\leqslant 2\end{cases}$ 内任取一点 P（x，y），若（x，y）满足 x+y≤b 的概率大于 $\frac{1}{8}$，则 b 的取值范围是（　　）

A.（－∞，1）　　B.（0，1）　C.（1，4）　D.（1，+∞）

8.（5 分）已知偶函数 f（x）（x∈R），当 x∈（－2，0]时，f（x）=－x（2+x），当 x∈[2，+∞）时，f（x）=（x

﹣2）（a﹣x）（a∈R）.

关于偶函数 f（x）的图象 G 和直线 l：y=m（m∈R）的 3 个命题如下：

①当 a=2，m=0 时，直线 l 与图象 G 恰有 3 个公共点；

②当 a=3，m=$\frac{1}{4}$时，直线 l 与图象 G 恰有 6 个公共点；

③∀m∈（1，+∞），∃a∈（4，+∞），使得直线 l 与图象 G 交于 4 个点，且相邻点之间的距离相等.

其中正确命题的序号是（　　）

A．①② B．①③ C．②③ D．①②③

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.（5 分）过点 P（0，2）且与直线 2x﹣y=0 平行的直线方程为_____.

10.（5 分）已知变量 x，y 具有线性相关关系，测得（x，y）的一组数据如下：（0，1），（1，2），（2，4），（3，5），其回归方程为$\hat{y}$=1.4x+a，则 a 的值等于_____.

11.（5 分）等差数列{a_n}中，a_3=5，a_5=3，则该数列的前 10 项和 S_{10}的值是_____.

12.（5 分）若 tan（π﹣x）=2，则 tan2x 的值是_____.

13.（5 分）若函数 f（x）=a^x（a＞0，a≠1）在[﹣2，1]上的最大值为 4，最小值为 m，则 m 的值是_____.

14.（5 分）已知直线 x=2，x=4 与函数 y=$\log_2$x 的图象交于 A，B 两点，与函数 y=$\log_4$x 的图象交于 C，D 两点，则直线 AB，CD 的交点坐标是_____.

三、解答题共 6 小题，共 80 分.解答要写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.（13 分）已知△ABC 的三个内角分别为 A，B，C，且 $2\sin^2(B+C)=\sqrt{3}\sin 2A$.

（Ⅰ）求 A 的度数；

（Ⅱ）若 BC=7，AC=5，求△ABC 的面积 S.

16.（13 分）高三某班 20 名男生在一次体检中被平均分成两个小组，第一组和第二组学生身高（单位：cm）的统计数据用茎叶图表示（如图）.

（Ⅰ）求第一组学生身高的平均值和方差；

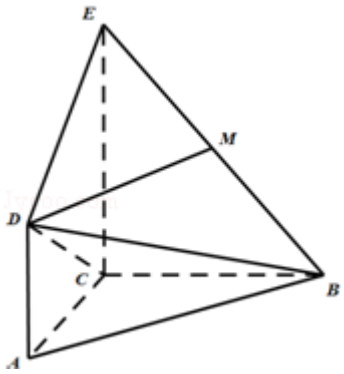
（Ⅱ）从身高超过 180cm 的五位同学中随机选出两位同学参加校篮球队集训，求这两位同学在同一小组的概率.

第一组		第二组
	15	9
9 8 8	16	6 9
5 5 1 1 0	17	2 3 4 7
2 1	18	2 3 5

17.（13 分）如图，多面体 EDABC 中，AC，BC，CE 两两垂直，AD∥CE，ED⊥DC，$AD=\frac{1}{2}CE$，M 为 BE 中点.

（Ⅰ）求证：DM∥平面 ABC；

（Ⅱ）求证：平面 BDE⊥平面 BCD.



18.（13 分）已知函数 $f(x)=a\ln x-(a+1)x+\frac{1}{2}x^2(a\geqslant 0)$.

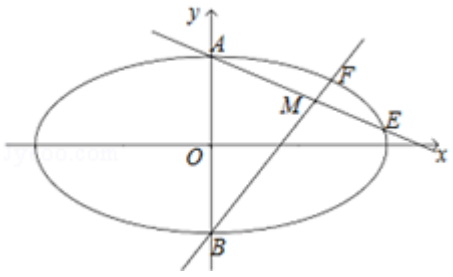
（Ⅰ）若直线 l 与曲线 y=f（x）相切，切点是 P（2，0），求直线 l 的方程；

（Ⅱ）讨论 f（x）的单调性.

19.（14 分）已知椭圆 C：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$，其短轴的端点分别为 A，B（如图），直线 AM，BM 分别与椭圆 C 交于 E，F 两点，其中点 M（m，$\frac{1}{2}$）满足 m≠0，且 $m\neq\pm\sqrt{3}$.

（Ⅰ）用 m 表示点 E，F 的坐标；

（Ⅱ）证明直线 EF 与 y 轴交点的位置与 m 无关.



20.（14 分）已知等差数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=3n-2$，等比数列$\{b_n\}$中，$b_1=a_1$，$b_4=a_3+1$．记集合 $A=\{x|x=a_n，n\in N^*\}$，$B=\{x|x=b_n，n\in N^*\}$，$U=A\cup B$，把集合 U 中的元素按从小到大依次排列，构成数列$\{c_n\}$.

（Ⅰ）求数列$\{b_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）求数列$\{c_n\}$的前 50 项和 S_{50}；

（Ⅲ）把集合$\complement_U A$中的元素从小到大依次排列构成数列$\{d_n\}$，写出数列$\{d_n\}$的通项公式，并说明理由.

参考答案

一、选择题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分.在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项.

1.【解答】∵i（3+4i）=3i+4i^2=﹣4+3i，

∴复数 i（3+4i）的虚部为 3.

故选 A.

2.【解答】当“a=1”时，“|a|=1”成立

即“a=1”⇒“|a|=1”为真命题

但“|a|=1”时，“a=1”不一定成立

即“|a|=1”时，“a=1”为假命题

故“a=1”是“|a|=1”的充分不必要条件

故选 A

3.【解答】由题意可得$\vec{a}\cdot\vec{b}$=（4，x）•（2，﹣1）=4×2﹣x=0，解得 x=8

故选 A

4.【解答】由双曲线$\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}=1$可得 a^2=2，b^2=3，

∴离心率 e=$\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$.

故选 C.

5.【解答】由于 A、B 中的函数的最小正周期都是$\frac{2\pi}{\frac{1}{2}}$=4π，故不满足条件，排除 A、B.

把 x=$\frac{\pi}{12}$代入 C 中的函数，函数值取得最大值 1，故此函数的图象关于直线 x=$\frac{\pi}{12}$对称，故满足条件.

把 x=$\frac{\pi}{12}$代入 D 中的函数，函数值为﹣$\frac{1}{2}$，没有取得最值，故不满足条件，排除 D，

故选 C.

6.【解答】由几何体的三视图知该几何体的上部是底面边长为 2 高为 1 的正四棱锥，

该几何体的下部是边长为 2 的正方体，

∴该几何体的表面积：$S=5\times 2^2+4\times\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}=20+4\sqrt{2}$.

故选 B.

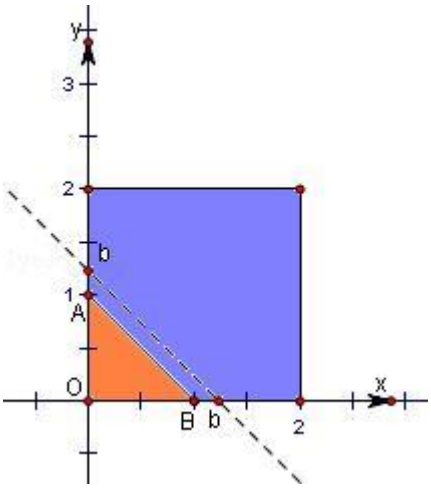
7.【解答】其构成的区域 D 如图所示的边长为 2 的正方形，面积为 $S_1=4$，

满足 $x+y\leqslant b$ 所表示的平面区域是以原点为直角坐标顶点，以 b 为直角边长的等腰直角三角形，其面积为 $S_2=\frac{1}{2}\times b^2$，

∴在区域 D 内随机取一个点，则此点满足 $x+y\leqslant b$ 的概率 $P=\frac{\frac{b^2}{2}}{4}=\frac{b^2}{8}$，

由题意得：$\frac{b^2}{8}>\frac{1}{8}$，∴$b>1$.

故选 D.



8.【解答】设 $x\in[0,2)$，则 $-x\in(-2,0]$，故 $f(-x)=x(2-x)$，

由函数为偶函数可知，当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=x(2-x)$，

故当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=\begin{cases}x(2-x), & x\in[0,2)\\(x-2)(a-x), & x\in[2,+\infty)\end{cases}$，

①当 $a=2$，$m=0$ 时，$x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=\begin{cases}x(2-x), & x\in[0,2)\\-(x-2)^2, & x\in[2,+\infty)\end{cases}$，

令其等于 0 可得，$x=0$，或 $x=2$，由函数图象的对称性可知，

此时直线 l 与图象 G 恰有 3 个公共点 -2，0，2，故①正确；

②当 $a=3$，$m=\frac{1}{4}$时，$x\in[0,+\infty)$ 时，$f(x)=\begin{cases}x(2-x), & x\in[0,2)\\(x-2)(3-x), & x\in[2,+\infty)\end{cases}$，

令其等于$\frac{1}{4}$可得 $x=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$，或 $x=\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，或 $x=\frac{5}{2}$，由函数图象的对称性可知，

此时直线 l 与图象 G 恰有 6 个公共点 $-\frac{2-\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，$-\frac{5}{2}$，$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$，$\frac{2+\sqrt{3}}{2}$，$\frac{5}{2}$，故②正确；

③$\forall m\in$（1，+∞），令 f（x）$=\begin{cases}x(2-x), & x\in[0,2)\\(x-2)(a-x), & x\in[2,+\infty)\end{cases}$$=m$，

∵当 $x\in[0,2)$ 时，$f(x)=x(2-x)=-(x-1)^2+1\leqslant 1$，

故只能让 $(x-2)(a-x)=m$，$(m>1)$，当 $\triangle=(a-2)^2-4m>0$，

即 $(a-2)^2>4$，即 $a>4$，或 $a<0$ 时，

可解得 $x=\frac{a+2-\sqrt{(a-2)^2-4m}}{2}$，或 $x=\frac{a+2+\sqrt{(a-2)^2-4m}}{2}$，

故由函数图象的对称性可知直线 l 与图象 G 交于 4 个点，由小到大排列为：$x_1=\frac{a+2+\sqrt{(a-2)^2-4m}}{2}$，

$x_2=\frac{a+2-\sqrt{(a-2)^2-4m}}{2}$，$x_3=\frac{a+2-\sqrt{(a-2)^2-4m}}{2}$，$x_4=\frac{a+2+\sqrt{(a-2)^2-4m}}{2}$，

而 $x_4-x_3=\sqrt{(a-2)^2-4m}$，$x_3-x_2=a+2-\sqrt{(a-2)^2-4m}$，

由 $x_3-x_2=x_4-x_3$，化简可得 $3a^2-20a+12=16m>16$，解得 $a<\frac{10-2\sqrt{22}}{3}$，或 $a>\frac{10+2\sqrt{22}}{3}$，

故可取 $a=8>\frac{10+2\sqrt{22}}{3}$，当然满足 $a\in$（4，+∞），使距离相等，

故对$\forall m\in$（1，+∞），$\exists a=8\in$（4，+∞），使得直线 l 与图象 G 交于 4 个点，且相邻点之间的距离相等，故③正确.

故选 D

二、填空题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】设与直线 2x－y=0 平行的直线方程为 2x－y+c=0，把点 P（0，2）代入可得 0－2+c=0，c=2，

故所求的直线的方程为 2x－y+2=0，

故答案为 2x－y+2=0.

10.【解答】∵$\overline{x}=\frac{0+1+2+3}{4}=1.5$，$\overline{y}=\frac{1+2+4+5}{4}=3$，

∴这组数据的样本中心点是（1.5，3）

把样本中心点代入回归直线方程 $\hat{y}=1.4x+a$，

∴$3=1.4\times 1.5+a$，

∴$a=0.9$.

故答案为：0.9.

11.【解答】∵$a_3=5$，$a_5=3$，

∴$\begin{cases}a_1+2d=5\\a_1+4d=3\end{cases}$，解可得 d=﹣1，$a_1=7$

∴$S_{10}=10a_1+45d=10\times7-45\times1=25$

故答案为：25

12.【解答】∵tan（π﹣x）=2，∴tanx=﹣2，∴$\tan2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2}=\frac{-4}{1-4}=\frac{4}{3}$，

故答案为 $\frac{4}{3}$.

13.【解答】①当 a＞1 时，f（x）在[﹣2，1]上单调递增，

则 f（x）的最大值为 f（1）=a=4，

最小值 m=f（﹣2）=$a^{-2}=4^{-2}=\frac{1}{16}$；

②当 0＜a＜1 时，f（x）在[﹣2，1]上单调递减，

则 f（x）的最大值为 f（﹣2）=$a^{-2}=4$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

此时最小值 m=f（1）=$a=\frac{1}{2}$，

故答案为：$\frac{1}{16}$或$\frac{1}{2}$.

14.【解答】联立 x=2 与 $y=\log_2x$ 可得$\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$，故 A（2，1），同理可得 B（4，2），

联立 x=2 与 $y=\log_4x$ 可得$\begin{cases}x=2\\y=\log_42=\frac{1}{2}\end{cases}$，

故 C（2，$\frac{1}{2}$），同理可得 D（4，1）

故直线 AB 的斜率为 $k_1=\frac{2-1}{4-2}=\frac{1}{2}$，故方程为 $y-1=\frac{1}{2}$（x﹣2），①

直线 CD 的斜率为 $k_2=\frac{1-\frac{1}{2}}{4-2}=\frac{1}{4}$，故方程为 $y-1=\frac{1}{4}$（x﹣4），②

联立①②可解得$\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$，故直线 AB，CD 的交点坐标是（0，0）

故答案为：（0，0）

三、解答题共 6 小题，共 80 分.解答要写出文字说明，演算步骤或证明过程.

15.【解答】（Ⅰ）∵ $2\sin^2(B+C)=\sqrt{3}\sin2A$. ∴ $2\sin^2A=2\sqrt{3}\sin A\cos A$，….（2 分）

∵sinA≠0，∴$\sin A=\sqrt{3}\cos A$，∴$\tan A=\sqrt{3}$，….（4 分）

∵0°＜A＜180°，∴A=60°．…（6 分）

（Ⅱ）在△ABC 中，∵$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\times AC\times\cos 60°$，BC=7，AC=5，

∴$49=AB^2+25-5AB$，

∴$AB^2-5AB-24=0$，解得 AB=8 或 AB=－3（舍），….（10 分）

∴$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC\times\sin 60°=\frac{1}{2}\times 5\times 8\times\frac{\sqrt{3}}{2}=10\sqrt{3}$．…（13 分）

16.【解答】（Ⅰ）读取茎叶图得到第一组的数据为：168，168，169，170，171，171，175，175，181，182.

则$\overline{x_1}=\frac{1}{10}(168+168+169+170+171+171+175+175+181+182)=173$c，

$S_1^2=\frac{1}{10}[(168-173)^2+(168-173)^2+(169-173^2)+\cdots+(181-173)^2+(182-173)^2]=23.6\text{cm}^2$；

答：第一组学生身高的平均值为 173cm，方差为 23.6cm^2.

（Ⅱ）设“甲、乙在同一小组”为事件 A，

读取茎叶图可知身高在 180cm 以上的学生由 5 人，分别记为 a，b，c，d，e，

其中 a，b 属于第一组，c，d，e 属于第二组.

从五位同学中随机选出两位的结果是如下 10 种：

（a，b）；（a，c）；　（a，d）；（a，e）；（b，c）；（b，d）；（b，e）；（c，d）；（c，e）；（d，e）.

其中两位同学在同一小组的 4 种结果是：（a，b）；　（c，d）；（c，e）；（d，e）.

∴$P(A)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$.

答：甲乙两位同学在同一小组的概率为$\frac{2}{5}$.

17.【解答】（Ⅰ）设 N 为 BC 中点，连接 MN，AN，

∵M 为 BE 中点，∴MN∥EC，且 MN=$\frac{1}{2}$EC，

∵AD∥EC，且 AD=$\frac{1}{2}$EC，

∴四边形 ANMD 为平行四边形.

∴AN∥DM∵DM⊄平面 ABC，AN⊂平面 ABC，

∴DM∥平面 ABC.

Ⅱ）∵BC⊥AC，BC⊥CE，AC∩CE=C，

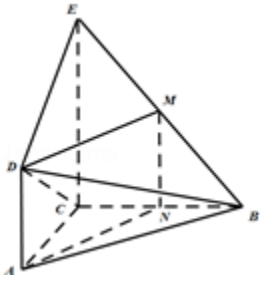
∴BC⊥平面 ACED，

∵DE⊂平面 ACED，∴BC⊥DE.

∵DE⊥DC，

又∵DE⊥BC，BC∩DC=C，∴DE⊥平面 BCD.

∵DE⊂平面 BDE，∴平面 BDE⊥平面 BCD.



18.【解答】（I）因为切点是 P（2，0），

∴$f(2)=a\ln 2-2(a+1)+\frac{1}{2}\times 2^2=0$，∴a=0，

∴函数 f（x）=$\frac{1}{2}x^2-x$，又 f′（x）=x﹣1，

所以切线的斜率为：f′（2）=1.

所以切线 l 的方程为 y=x﹣2.

函数 $f(x)=a\ln x-(a+1)x+\frac{1}{2}x^2(a\geqslant 0)$.

（II）由题意得，f′（x）=$\frac{a}{x}$﹣（1+a）+x=$\frac{(x-1)(x-a)}{x}$（x＞0）

由 f′（x）=0，得 $x_1=1$，$x_2=a$

①当 0＜a＜1 时，令 f′（x）＞0，x＞0，可得 0＜x＜a 或 x＞1；

令 f′（x）＜0，x＞0，可得 a＜x＜1，

∴函数 f（x）的单调增区间是（0，a）和（1，+∞），单调减区间是（a，1）；

②当 a=1 时，f′（x）=$\frac{(x-1)^2}{x}$≥0，当且仅当 x=1 时，f′（x）=0，

所以函数 f（x）在区间（0，+∞）上是单调增函数；

③当 a＞1 时，令 f′（x）＞0，x＞0，可得 0＜x＜1 或 x＞a；

令 f′（x）＜0，x＞0，可得 1＜x＜a

∴函数 f（x）的单调增区间是（0，1）和（a，+∞），单调减区间是（1，a）.

19.【解答】（Ⅰ）依题意知 a=2，$c=\sqrt{3}$，∴$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$；

（Ⅱ）∵A（0，1），B（0，﹣1），M（m，$\frac{1}{2}$），且 m≠0，

∴直线 AM 的斜率为 $k_1=-\frac{1}{2m}$，直线 BM 斜率为 $k_2=\frac{3}{2m}$，

∴直线 AM 的方程为 y=$-\frac{1}{2m}x+1$，直线 BM 的方程为 y=$\frac{3}{2m}x-1$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=\frac{1}{2m}x+1\end{cases}$ 得（m^2+1）$x^2-4mx=0$，

∴$x=0$，$x=\frac{4m}{m^2+1}$，∴$E(\frac{4m}{m^2+1},\frac{m^2-1}{m^2+1})$，

由$\begin{cases}\frac{x^2}{4}+y^2=1\\ y=\frac{3}{2m}x-1\end{cases}$ 得（$9+m^2$）$x^2-12mx=0$，

∴$x=0$，$x=\frac{12m}{m^2+9}$，∴$F(\frac{12m}{m^2+9},\frac{9-m^2}{m^2+9})$；

（Ⅲ）由（Ⅱ）可知：

$k_{EF}=\frac{\frac{9-m^2}{m^2+9}-\frac{m^2-1}{m^2+1}}{\frac{12m}{m^2+9}-\frac{4m}{m^2+1}}=-\frac{m^2+3}{4m}$.

∴直线 EF 的方程为：$y\frac{m^2-1}{m^2+1}=-\frac{m^2+3}{4m}(x-\frac{4m}{m^2+1})$，

令 $x=0$，得 $y=\frac{m^2-1}{m^2+1}+\frac{m^2+3}{m^2+1}=2$，

∴直线 EF 与 y 轴的交点为（0，2）与 m 无关.

20.【解答】（Ⅰ）设等比数列$\{b_n\}$的公比为 q，

∵$b_1=a_1=1$，$b_4=a_3+1=8$，则 $q^3=8$，∴$q=2$，

∴$b_n=2^{n-1}$；

（Ⅱ）根据数列$\{a_n\}$和数列$\{b_n\}$的增长速度，数列$\{c_n\}$的前 50 项至多在数列$\{a_n\}$中选 50 项，数列$\{a_n\}$的前 50 项所构成的集合为{1，4，7，10，…，148}，

由 $2^{n-1}<148$ 得，$n\leqslant 8$，数列$\{b_n\}$的前 8 项构成的集合为{1，2，4，8，16，32，64，128}，其中 1，4，16，64 是等差数列$\{a_n\}$中的项，2，8，32，128 不是等差数列中的项，$a_{46}=136>128$，故数列$\{c_n\}$的前 50 项应包含数列$\{a_n\}$的前 46 项和数列$\{b_n\}$中的 2，8，32，128 这 4 项.

所以 $S_{50}=\frac{46(a_1+a_{46})}{2}+2+8+32+128=3321$；

（Ⅲ）据集合 B 中元素 2，8，32，128∉A，猜测数列$\{d_n\}$的通项公式为 $d_n=2^{2n-1}$.

∵$d_n=b_{2n}$，∴只需证明数列$\{b_n\}$中，$b_{2n-1}\in A$，$b_{2n}\notin A$（$n\in N^*$），

证明如下：∵$b_{2n+1}-b_{2n-1}=2^{2n}-2^{2n-2}=4^n-4^{n-1}=3\times 4^{n-1}$，即 $b_{2n+1}=b_{2n-1}+3\times 4^{n-1}$，

若$\exists m\in N^*$，使 $b_{2n-1}=3m-2$，那么 $b_{2n+1}=3m-2+3\times4^{n-1}=3(m+4^{n-1})-2$，

所以，若 $b_{2n-1}\in A$，则 $b_{2n+1}\in A$．因为 $b_1\in A$，重复使用上述结论，即得 $b_{2n-1}\in A$（$n\in N^*$）．

同理，$b_{2n+2}-b_{2n}=2^{2n+1}-2^{2n-1}=2\times4^n-2\times4^{n-1}=3\times2\times4^{n-1}$，即 $b_{2n+2}=b_{2n}+3\times2\times4^{n-1}$，

因为“$3\times2\times4^{n-1}$”为数列$\{a_n\}$的公差 3 的整数倍，

所以说明 b_{2n} 与 b_{2n+2}（$n\in N^*$）同时属于 A 或同时不属于 A，

当 n=1 时，显然 $b_2=2\notin A$，即有 $b_4=2\notin A$，重复使用上述结论，即得 $b_{2n}\notin A$，

$\therefore d_n=2^{2n-1}$；