2013 北京东城高三二模

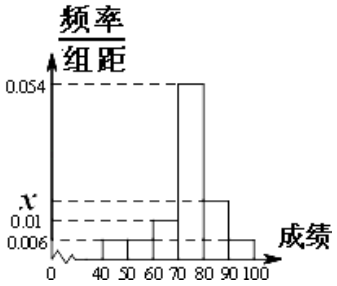
数　　学（文）

一、本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．第 I 卷（选择题共 40 分）

1.（5 分）已知集合 A={x|x（x－1）＜0，x∈R}，B={x|－2＜x＜2，x∈R}，那么集合 A∩B 是（　　）

A．∅　　B．{x|0＜x＜1，x∈R}　　C．{x|－2＜x＜2，x∈R}　D．{x|－2＜x＜1，x∈R}

2.（5 分）如图是某班 50 位学生期中考试数学成绩的频率分布直方图，其中成绩分组区间是：[40，50），[50，60），[60，70），[70，80），[80，90）[90，100），则图中 x 的值等于（　　）

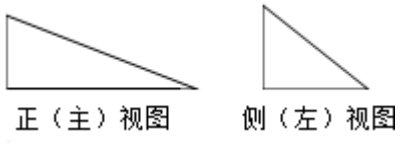


A．0.754　　B．0.048　　C．0.018　　D．0.012

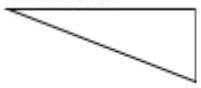
3.（5 分）f（x）=$\begin{cases} -\frac{2}{x}, & x<0 \\ 3+\log_2 x, & x>0 \end{cases}$，则 f（f（－1））等于（　　）

A．－2　B．2　　C．－4　D．4

4.（5 分）已知一个三棱锥的三视图如图所示，其中三个视图都是直角三角形，则在该三棱锥的四个面中，直角三角形的个数为（　　）


正（主）视图

侧（左）视图


俯视图

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

5.（5 分）已知命题 p：∀x∈R，sin（π－x）=sinx；命题 q：α，β 均是第一象限的角，且 α＞β，则 sinα＞sinβ．下列命题是真命题的是（　　）

A．p∧¬q　B．¬p∧¬q C．¬p∧q　D．p∧q

6.（5 分）已知 x，y 满足约束条件$\begin{cases} y\leqslant x \\ x+y\leqslant 1 \\ y\geqslant -1 \end{cases}$，则 z=2x+y 的最大值为（　　）

A．3　　B．－3　C．1　　D．$\frac{3}{2}$

7．（5 分）根据表格中的数据，可以断定函数 f（x）=lnx－$\frac{3}{x}$的零点所在的区间是（　　）

x	1	2	e	3	5
lnx	0	0.69	1	1.10	1.61
$\frac{3}{x}$	3	1.5	1.10	1	0.6

A．（1，2）　B．（2，e）　C．（e，3）　D．（3，5）

8．（5 分）在数列{a_n}中，若对任意的 n∈N^*，都有$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=t$（t 为常数），则称数列{$a_n$}为比等差数列，t 称为比公差．现给出以下命题：

①等比数列一定是比等差数列，等差数列不一定是比等差数列；

②若数列{a_n}满足 $a_n=\frac{2^{n-1}}{n^2}$，则数列{a_n}是比等差数列，且比公差 $t=\frac{1}{2}$；

③若数列{c_n}满足 $c_1=1$，$c_2=1$，$c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$（n≥3），则该数列不是比等差数列；

④若{a_n}是等差数列，{b_n}是等比数列，则数列{a_nb_n}是比等差数列．

其中所有真命题的序号是（　　）

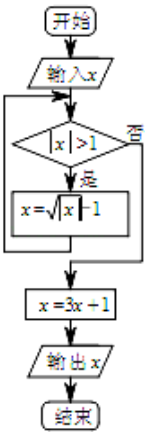
A．①②　B．②③　C．③④　D．①③

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分．

9．（5 分）已知向量$\vec{a}$=（2，－3），$\vec{b}$=（1，λ），若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，则 λ=_____．

10．（5 分）各项均为正数的等比数列{{a_n}的前 n 项和为 S_n，若 $a_3=2$，$S_4=5S_2$，则 a_1的值为_____，S_4的值为_____．

11．（5 分）阅读程序框图，运行相应的程序，当输入 x 的值为－25 时，输出 x 的值为_____．



12．（5 分）在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 A+C=2B，若 a=1，b=$\sqrt{3}$，则 c 的值为_____．

13．（5 分）过抛物线 $y^2=4x$ 焦点的直线交抛物线于 A、B 两点，若|AB|=10，则 AB 的中点 P 到 y 轴的距离等于_____．

14．（5 分）对定义域的任意 x，若有$f(x)=-f(\frac{1}{x})$的函数，我们称为满足“翻负”变换的函数，下列函数：

①$y=x-\frac{1}{x}$，

②$y=\log_a x+1$，

③$y=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 0, & x=1 \\ -\frac{1}{x}, & x>1 \end{cases}$

其中满足“翻负”变换的函数是_____. （写出所有满足条件的函数的序号）

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.（13 分）已知函数 f（x）=sinx（$\sqrt{3}$cosx﹣sinx）.

（1）求 f（x）的最小正周期；

（2）当 x∈（0，$\frac{2\pi}{3}$）时，求 f（x）的取值范围.

16.（13 分）用分层抽样方法从高中三个年级的相关人员中抽取若干人组成研究小组，有关数据见表：（单位：人）

年级	相关人数	抽取人数
高一	99	x
高二	27	y
高三	18	2

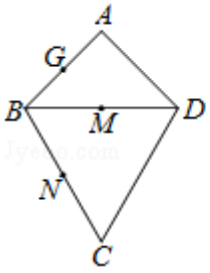
（1）求 x，y；

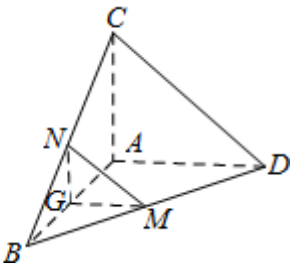
（2）若从高二、高三年级抽取的人中选 2 人，求这二人都来自高二年级的概率.

17.（14 分）如图，△BCD 是等边三角形，AB=AD，∠BAD=90°，M，N，G 分别是 BD，BC，AB 的中点，将△BCD 沿 BD 折叠到△BC′D 的位置，使得 AD⊥C′B.

（1）求证：平面 GNM∥平面 ADC′；

（2）求证：C′A⊥平面 ABD.





18.（14 分）已知函数$f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$（a＞0）.

（1）求 f（x）的单调区间；

（2）如果 P（x_0，y_0）是曲线 y=f（x）上的点，且 x_0∈（0，3），若以 P（x_0，y_0）为切点的切线的斜率$k\leqslant\frac{1}{2}$恒成立，求实数 a 的最小值.

19.（13 分）已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率$e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，原点到过 A（a，0），B（0，﹣b）两点的直线的距离是$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）已知直线 y=kx+1（k≠0）交椭圆于不同的两点 E，F，且 E，F 都在以 B 为圆心的圆上，求 k 的取值范围.

20.（13 分）已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，$a_{2n}=a_n$，$a_{4n-1}=0$，$a_{4n+1}=1$（$n\in\mathbb{N}^*$）.

（1）求 a_4，a_7；

（2）是否存在正整数 T，使得对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$，有 $a_{n+T}=a_n$.

参考答案

一、本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项．第 I 卷（选择题共 40 分）

1.【解答】由 x（x﹣1）＜0，得 0＜x＜1.

所以 A={x|x（x﹣1）＜0，x∈R}={x|0＜x＜1}，

又 B={x|﹣2＜x＜2，x∈R}，

所以 A∩B={x|0＜x＜1，x∈R}∩{x|﹣2＜x＜2，x∈R}={x|0＜x＜1，x∈R}.

故选 B.

2.【解答】由图得 30×0.006+10×0.01+10×0.054+10x=1，

解得 x=0.018

故选 C.

3.【解答】由分段函数知，f（﹣1）=$(\frac{2}{-1})=2>0$，

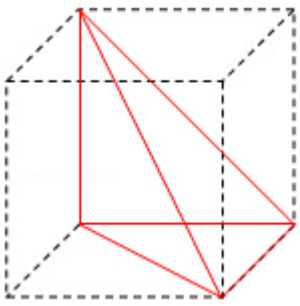
所以 f（f（﹣1））=f（2）=3+$\log_2 2$=3+1=4.

故选 D.

4.【解答】由题意可知，几何体是三棱锥，其放置在长方体中形状如图所示（图中红色部分），

利用长方体模型可知，此三棱锥的四个面中，全部是直角三角形.

故选：D.



5.【解答】由三角函数的诱导公式知 sin（π﹣x）=sinx，得命题 p：∀x∈R，sin（π﹣x）=sinx 为真命题，

又∵取 α=420°，β=60°，α＞β，但 sinα＞sinβ 不成立，q 为假命题，

故非 p 是假命题，非 q 是真命题；

所以 A：p∧¬q 是真命题，B：¬p∧¬q 是假命题，C：¬p∧q 假命题，D：命题 p∧q 是假命题，

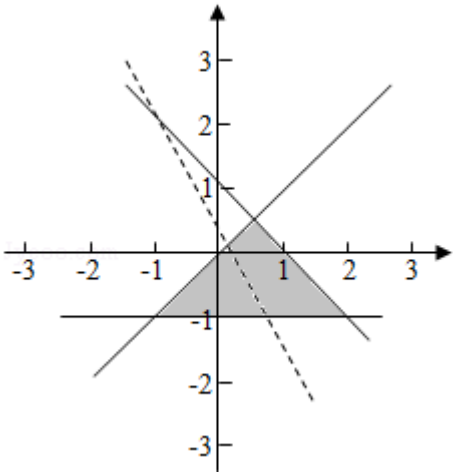
故选 A.

6.【解答】作图

易知可行域为一个三角形，

当直线 z=2x+y 过点 A（2，﹣1）时，z 最大是 3，

故选 A.



7.【解答】由所给的表格可得 f（e）=1﹣1.1=﹣0.1<0，f（3）=1.1﹣1=0.1>0，∴f（e）f（3）<0，

故函数的零点所在的区间为（e，3），

故选 C.

8.【解答】①若数列$\{a_n\}$为等比数列，且公比为 q，则$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=q-q=0$，为常数，故等比数列一定是比等差数列，

若数列$\{a_n\}$为等差数列，且公差为 d，当 d=0 时，$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-1=0$，为常数，是比等差数列，

当 d≠0 时，$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}$不为常数，故不是比等差数列，故等差数列不一定是比等差数列，故正确；

②若数列$\{a_n\}$满足 $a_n=\frac{2^{n-1}}{n^2}$，则$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2(n+1)^2}{(n+2)^2}-\frac{2n^2}{(n+1)^2}$不为常数，故数列$\{a_n\}$不是比等差数列，故错误；

③若数列$\{c_n\}$满足 $c_1=1$，$c_2=1$，$c_n=c_{n-1}+c_{n-2}$（n≥3），可得 $c_3=2$，$c_4=3$，故$\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_2}{c_1}=1$，$\frac{c_4}{c_3}-\frac{c_3}{c_2}=-\frac{1}{2}$

显然$\frac{c_3}{c_2}-\frac{c_2}{c_1}\neq\frac{c_4}{c_3}-\frac{c_3}{c_2}$，故该数列不是比等差数列，故正确；

④若$\{a_n\}$是等差数列，$\{b_n\}$是等比数列，可举$\{a_n\}$为 0 列，则数列$\{a_nb_n\}$为 0 列，显然不满足定义，即数列$\{a_nb_n\}$不是比等差数列，故错误.

故答案为：D

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.

9.【解答】∵$\vec{a}$=（2，﹣3），$\vec{b}$=（1，λ），若$\vec{a}\parallel\vec{b}$，

∴2×λ﹣（﹣3）×1=0，

解得 λ=$-\frac{3}{2}$.

故答案为：$-\frac{3}{2}$.

10.【解答】若等比数列的公比等于 1，由 $a_3=2$，则 $S_4=4a_3=4\times2=8$，$5S_2=5\times2S_3=5\times2\times2=20$，与题意不符.

设等比数列的公比为 q（q≠1），

由 $a_3=2$，$S_4=5S_2$，得：$\begin{cases}a_1q^2=2\\\frac{a_1(1-q^4)}{1-q}=5(a_1+a_1q)\end{cases}$，

整理得$\begin{cases}a_1q^2=2\\q^2=4\end{cases}$，解得$a_1=\frac{1}{2}$，q=±2．因为数列$\{a_n\}$的各项均为正数，所以 q=2.

则$S_4=\frac{\frac{1}{2}(1-2^4)}{1-2}=\frac{15}{2}$.

故答案为$\frac{1}{2}$；$\frac{15}{2}$.

11.【解答】当输入 x=﹣25 时，

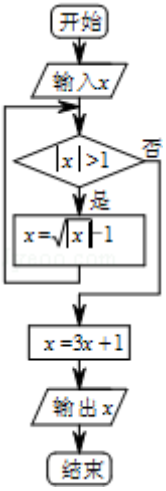
|x|＞1，执行循环，$x=\sqrt{25}-1=4$；

|x|=4＞1，执行循环，$x=\sqrt{4}-1=1$，

|x|=1，退出循环，

输出的结果为 $x=3\times1+1=4$.

故答案为：4.



12.【解答】∵A+C=2B，A+B+C=π，

∴B=$\frac{\pi}{3}$，即 cosB=$\frac{1}{2}$，

又 a=1，b=$\sqrt{3}$，

∴由余弦定理得：3=1+c^2﹣c，

解得：c=2 或 c=﹣1（舍去），

则 c 的值为 2.

故答案为：2

13.【解答】抛物线 y^2=4x 焦点 E（1，0），准线为 l：x=﹣1，

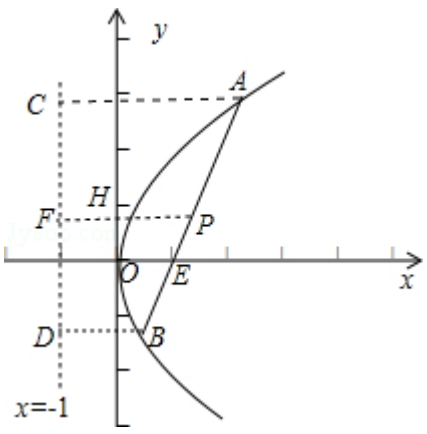
由于 AB 的中点为 P，过 A、P、B 分别作准线的垂线，

垂足分别为 C、F、D，PF 交纵轴于点 H，如图所示：

则由 PF 为直角梯形的中位线知，PF=$\frac{AC+BD}{2}$=$\frac{AE+EB}{2}$=$\frac{AB}{2}$=5，

∴PH=PF﹣FH=5﹣1=4，

故答案为：4.



14.【解答】①f（x）=x-$\frac{1}{x}$，则 f（$\frac{1}{x}$）=$\frac{1}{x}-x$=-（x-$\frac{1}{x}$）=-f（x），即 f（x）=-f（$\frac{1}{x}$），

所以①$y=x-\frac{1}{x}$满足“翻负”变换；

②f（x）=$\log_a x+1$，则-f（$\frac{1}{x}$）=-（$\log_a\frac{1}{x}+1$）=$\log_a x-1\neq f(x)$，

所以 $y=\log_a x+1$ 不满足“翻负”变换；

③f（x）=$\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 0, & x=1\\ -\frac{1}{x}, & x>1\end{cases}$，

当 0<x<1 时，$\frac{1}{x}>1$，-f（$\frac{1}{x}$）=-（-x）=x=f（x）；

当 x=1 时，$\frac{1}{x}=1$，-f（$\frac{1}{x}$）=-0=0=f（x）；

当 x>1 时，$0<\frac{1}{x}<1$，-f（$\frac{1}{x}$）=$-\frac{1}{x}$=f（x），

所以 f（x）=$\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 0, & x=1\\ -\frac{1}{x}, & x>1\end{cases}$ 满足“翻负”变换，

故答案为：①③.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程．

15.【解答】（Ⅰ）因为函数 f（x）=sinx（$\sqrt{3}$cosx-sinx）=$\sqrt{3}$sinxcosx-$\sin^2 x$

=$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}=\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}$，

所以，f（x）的最小正周期 T=$\frac{2\pi}{2}=\pi$.

（Ⅱ）因为 $0<x<\frac{2\pi}{3}$，所以，$\frac{\pi}{6}<2x+\frac{\pi}{6}<\frac{3\pi}{2}$，

∴$-1<\sin(2x+\frac{\pi}{6})\leqslant 1$，$-\frac{3}{2}<\sin(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$，

所以，f（x）的取值范围是（$-\frac{3}{2}$，$\frac{1}{2}$].

16.【解答】（Ⅰ）由题意可得 $\frac{x}{99}=\frac{y}{27}=\frac{2}{18}$，所以 x=11，y=3.

（Ⅱ）记从高二年级抽取的 3 人为 b_1，b_2，b_3，从高三年级抽取的 2 人为 c_1，c_2，

则从这两个年级中抽取的 5 人中选 2 人的基本事件有：

（b_1，b_2），（b_1，b_3），（b_1，c_1），（b_1，c_2），

（b_2，b_3），（b_2，c_1），（b_2，c_2），

（b_3，c_1），（b_3，c_2），（c_1，c_2）共 10 种．

设选中的 2 人都来自高二的事件为 A，

则 A 包含的基本事件有：（b_1，b_2），（b_1，b_3），（b_2，b_3）共 3 种．

因此$P(A)=\frac{3}{10}=0.3$．

故选中的 2 人都来自高二的概率为 0.3．

17．【解答】（1）因为 M，N 分别是 BD，BC′ 的中点，

所以 MN∥DC′．

因为 MN⊄平面 ADC′，DC′⊂平面 ADC′，

所以 MN∥平面 ADC′．

同理 NG∥平面 ADC′．

又因为 MN∩NG=N，

所以平面 GNM∥平面 ADC′．

（2）因为∠BAD=90°，所以 AD⊥AB．

又因为 AD⊥C′B，且 AB∩C′B=B，

所以 AD⊥平面 C′AB．

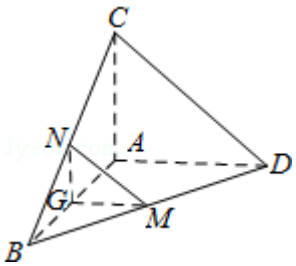
因为 C′A⊂平面 C′AB，所以 AD⊥C′A．

因为△BCD 是等边三角形，AB=AD，

不防设 AB=1，则 $BC=CD=BD=\sqrt{2}$，可得 C′A=1．

由勾股定理的逆定理，可得 AB⊥C′A．

因为 AB∩AD=A，所以 C′A⊥平面 ABD．　　…（14 分）



18．【解答】（Ⅰ）$f(x)=\ln x+\frac{a}{x}$，定义域为（0，+∞），

则$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{a}{x^2}=\frac{x-a}{x^2}$．

因为 a＞0，由 f′（x）＞0，得 x∈（a，+∞），

由 f′（x）＜0，得 x∈（0，a），

所以 f（x）的单调递增区间为（a，+∞），单调递减区间为（0，a）．

（Ⅱ）由题意，以 P（x_0，y_0）为切点的切线的斜率 k 满足$k=f'(x_0)=\frac{x_0-a}{x_0^2}\leqslant\frac{1}{2}$（$0<x_0<3$），

所以 $a\geqslant-\frac{1}{2}x_0^2+x_0$对 $0<x_0<3$ 恒成立.

又当 $x_0>0$ 时，$-\frac{3}{2}<-\frac{1}{2}x_0^2+x_0\leqslant\frac{1}{2}$，

所以 a 的最小值为$\frac{1}{2}$.

19.【解答】（1）直线 AB 的方程为：bx﹣ay﹣ab=0

∵原点到过 A（a，0），B（0，﹣b）两点的直线的距离是$\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

$\therefore\frac{|ab|}{\sqrt{b^2+a^2}}=\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$\therefore a^2b^2=\frac{16}{5}(b^2+a^2)$①

∵椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{3}{4}$

$\therefore a^2=4b^2$②

②代入①，可得 $b^2=4$，

$\therefore a^2=16$

∴椭圆的方程为$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$；

（2）由题意，B（0，﹣2）

设 E（x_1，y_1），F（x_2，y_2），由 E，F 在圆上，得 $x_1^2+(y_1+2)^2=x_2^2+(y_2+2)^2$…③，

由 E，F 在直线 $y=kx+1$ 得 $y_1=kx_1+1$，$y_2=kx_2+1$，

代入③式，可得 $(1+k^2)(x_1+x_2)(x_1-x_2)+6k(x_1-x_2)=0$，

因为 E，F 为直线上不同两点，所以 $x_1\neq x_2$，所以 $(1+k^2)(x_1+x_2)+6k=0$，

即 $x_1+x_2=-\frac{6k}{1+k^2}$④

又由 E，F 在椭圆上，将 $y=kx+1$ 代入$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$，得 $(1+4k^2)x^2+8kx-12=0$，

由根与系数的关系，$x_1+x_2=-\frac{8k}{1+4k^2}$…⑤，

将④⑤两式联立求解得 k=0（舍）或 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$，

故 $k=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.

20.【解答】（1）∵$a_1=1$，$a_{2n}=a_n$，$a_{4n-1}=0$，

∴$a_4=a_2=a_1=1$；$a_7=a_{4\times2-1}=0$.

（2）假设存在正整数 T，使得对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$，有 $a_{n+T}=a_n$.

则存在无数个正整数 T，使得对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$，有 $a_{n+T}=a_n$.

设 T 为其中最小的正整数.

若 T 为奇数，设 T=2t－1（$t\in\mathbb{N}^*$），则 $a_{4n+1}=a_{4n+1+T}=a_{4n+1+2T}=a_{4(n+t)-1}=0$，与已知 $a_{4n+1}=1$ 矛盾.

若 T 为偶数，设 T=2t（$t\in\mathbb{N}^*$），则 $a_{2n+T}=a_{2n}=a_n$，

而 $a_{2n+T}=a_{2n+2t}=a_{n+t}$，从而 $a_{n+t}=a_n$.

而 t＜T，与 T 为其中最小的正整数矛盾.

综上，不存在正整数 T，使得对任意的 $n\in\mathbb{N}^*$，有 $a_{n+T}=a_n$. …（13 分）